Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2008

Mathematik für Informatiker II
Serie 10

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sin x = 2 + \ln x$ genau eine Lösung im Intervall $(0, \infty)$ hat, indem Sie die Gleichung in eine Fixpunktgleichung der Form $x = f(x)$ mit einer Kontraktion f umformen. Berechnen Sie die Lösung näherungsweise.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Zeigen Sie, dass die Richardson-Iteration für den Relaxationsparameter
$$w = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$
konvergiert.

   Berechnen Sie für
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
und den Startwert
$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
zwei Iterationsschritte mit obigem Parameter w sowie mit $w = \dfrac{1}{4}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$.

4. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f, g \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$. Sei $h : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$. Zeigen Sie, dass $h \in C^1(D)$ und dass $\operatorname{grad} h(x) = g(x)^T \cdot J_f(x) + f(x)^T \cdot J_g(x)$ für $x \in D$.

Die Lösungen sind am 03.07.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.