Mathematik für Informatiker II
Serie 9

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Bestimmen Sie die Normen $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ und $\|A\|_\infty$.

2. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Es gelte
$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$
für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

   Hinweis: Wenden Sie den Störungssatz an.

3. Sei $V = C[0,1]$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \in V$ definiert durch $g_n(x) = x^n$. Untersuchen Sie für die Normen $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ und $||f||_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ auf V, ob (g_n) konvergiert.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante
$$L = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$
ist.

Die Lösungen sind am 26.06.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.