Mathematematik für Informatiker II
Serie 8

1. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   und sei $W = \text{span}\,(v_1, v_2)$. Bestimmen Sie eine Basis von $W^{\perp}$.

2. Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von v_3 auf den Unterraum $\text{span}\,(v_1, v_2)$.

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B^2 = A$ existiert.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ die Matrix, die aus A durch Weglassen der letzten $n - k$ Zeilen und Spalten besteht. Zeigen Sie: Ist A positiv definit, so gilt

$$\det\,(A_k) > 0 \text{ für alle } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

   Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung.

Die Lösungen sind am 19.06.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.