Mathematik für Informatiker II
Serie 7

1. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalform hat.

2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ eine Norm auf V. Zeigen Sie, dass durch $d(v,w) = \|v-w\|$ eine Metrik auf V gegeben ist.

3. Seien
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von span (v_1, v_2, v_3).

4. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für $v, w \in V$ folgende Gleichungen gelten:

   (a) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$,

   (b) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$.

   Warum heißt (b) Parallelogrammidentität?

Die Lösungen sind am 12.06.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.