Mathematik für Informatiker II
Serie 4

1. Seien V, W Vektorräume über dem Körper K und sei $F : V \to W$ linear. Sei V' Unterraum von V und sei W' Unterraum von W.
   Zeigen Sie, dass $F(V')$ Unterraum von W und $F^{-1}(W')$ Unterraum von V ist.

2. Seien V, W Vektorräume über dem Körper K und sei $F : V \to W$ linear. Sei U Unterraum von V und sei $U' = F^{-1}(F(U))$. Zeigen Sie, dass U' Unterraum ist.

   Gilt allgemein immer $\dim(U') \leq \dim(U)$ oder $\dim(U') \geq \dim(U)$? Geben Sie ein Beispiel mit $\dim(U') \neq \dim(U)$.

3. Wie lauten die Matrixdarstellungen und die Kerne der folgenden linearen Abbildungen:

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ y + 3z \\ -y \end{pmatrix},$$

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x + y + z \\ 2y - 2x \end{pmatrix},$$

$$H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad H = G \circ F.$$

4. Es sei $A = (a_{ij})$ eine $(n \times n)-$Matrix mit $a_{ij} = 0$ falls $i \leq j$. Die Matrix $B = (b_{ij})$ sei definiert durch $B := A^2 = A \cdot A$. Zeigen Sie, dass $b_{ij} = 0$ falls $i \leq j + 1$. Formulieren Sie (ohne Beweis) ein analoges Ergebnis für $A^3, A^4, \ldots$.

Die Lösungen sind am 22.05.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.