Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2008

Klausur zur Mathematik für Informatiker II

19. Juli 2008

Jede der folgenden 10 Aufgaben wird mit maximal 10 Punkten bewertet. Zum Bestehen der Klausur sind 60 Punkte erforderlich. Bearbeitungszeit: 3 Stunden

1. (a) Wann heißen Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraumes V linear abhängig?
   (b) Wann heißt eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit?
   (c) Geben Sie die Definition des Begriffs „Richtungsableitung".

2. Berechnen Sie das Integral
$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx.$$

3. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und sei $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0) + f(1)$.
   (a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.
   (b) Für $c \in \mathbb{R}$ sei $f_c : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_c(x) = x^2 + c$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt $f_c \in \text{Kern}(\varphi)$?

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und W der durch
$$W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$
definierte Teilraum von V.

   Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von W.

7. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
   Zeigen Sie, dass durch
   $$\|f\| = |f(0)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$
   eine Norm auf V gegeben ist.

8. Sei
   $$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie einen Relaxations-Parameter w, für den das Richardson-Iterationsverfahren konvergiert, und führen Sie mit diesem Parameter und dem Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Iterationsschritt durch.

9. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   Zeigen Sie, dass die partielle Ableitung $\partial_2 f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert, aber $\partial_2 f$ in $(0,0)$ nicht stetig ist.

10. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 3y - 3\ln(x+y)$.
    Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.