Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2007/08

Mathematik für Informatiker I
Serie 13

1. Zeigen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Ableitungen:

$$\begin{array}{lll} f: & (1,\infty) \to \mathbb{R}, & x \mapsto \ln(\ln x), \\ g: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} & x \mapsto \sin(1+\cos x), \\ h: & (0,\infty) \to \mathbb{R}, & x \mapsto \dfrac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}+2}, \\ u: & \mathbb{R} \to \mathbb{C}, & x \mapsto \exp(ix^2), \\ v: & (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, & x \mapsto x^{\tan x}, \\ w: & (0,\infty) \to \mathbb{R}, & x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x. \end{array}$$

2. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
bijektiv ist und dass die Umkehrfunktion
$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
differenzierbar ist und $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt.

3. Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4\ln(\sqrt{x^2+3}) + x,$

   (b) $g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + 6x + \dfrac{8}{x}.$

   Fertigen Sie auch eine Skizze der Graphen von f und g an.

4. Ein Schwimmer ist 60 m vom (gradlinigen) Ufer entfernt. Er möchte möglichst schnell zu einem Boot, das in 1 km Entfernung am Ufer liegt. An welchen Punkt des Ufers sollte er schwimmen, wenn seine Schwimmgeschwindigkeit 1 m/s und seine Laufgeschwindigkeit 7 m/s beträgt? Wie lange braucht er dann bis zum Boot?

Die Lösungen sind am 07.02.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.