Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2007/08

Mathematik für Informatiker I
Serie 10

1. Untersuchen Sie die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{3n}} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

mit Hilfe des Quotientenkriteriums auf Konvergenz.

2. Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

3. Zeigen Sie, dass

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}.$$

Hinweis. Es gilt $m! \geq (\ell+1)^{m-\ell}\ \ \ell!$ für $m > \ell$.

4. (a) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 2^m - 1$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^j a_{2^j}.$$

(b) Zeigen Sie durch Anwendung von (a) auf $a_k = 1/k^2$, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Die Lösungen sind am 17.01.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.