Mathematik für Informatiker I
Serie 9

1. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei
$$a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{(4+5i)^n + 6^n}{(4+5i)^{n+1} + 7i} .$$
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} .$$
Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Hinweis. Benutzen Sie Korollar 3.29 der Vorlesung.

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv durch $a_1 = 2$ und
$$a_{n+1} = \frac{3a_n^2 + 1}{a_n^2 + 3}$$
gegebene Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.
Berechnen Sie mit Hilfe eines Computerprogramms auch die Folgenglieder a_{10} und a_{100}.

4. Sei (a_n) die rekursiv durch $a_1 = 1$ und
$$a_{n+1} = \frac{10n\, a_n}{10n + a_n}$$
definierte Folge. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert.
Zusatz. Was ist der Grenzwert der Folge (a_n)?

Die Lösungen sind am 10.01.2008 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!