Mathematik für Informatiker I
Serie 8

1. Sei (M, d) metrischer Raum. Sei $d^* : M \times M \to \mathbb{R}_0^+$, $\quad d^*(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$. Zeigen Sie, dass d^* eine Metrik auf M ist, welche äquivalent zu d ist.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$
Bestimmen Sie dazu zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Es gelte $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass auch die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

4. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, wobei
$$a_n = \frac{2n^2 + 3}{4n^2 + 5n} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{n^3}{n! + n^2}\ .$$
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Die Lösungen sind am 20.12.2007 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.