Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2007/08

Mathematik für Informatiker I
Serie 7

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler t der Polynome
$$p(x) = 28x^5 - 66x^4 + 60x^3 - 32x^2 + 29x + 5$$
und
$$q(x) = 14x^3 - 33x^2 + 23x + 4$$
im Polynomring $\mathbb{R}[x]$. Bestimmen Sie Polynome $a, b \in \mathbb{R}[x]$ mit
$$ap + bq = t.$$

2. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von
$$p(x) = x^5 + x^2 + 2x + 2$$
und
$$q(x) = 2x^3 + 2x + 1$$
im Polynomring $\mathbb{Z}_3[x]$.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad n. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass $p(\bar{z}_0) = 0$ gilt. Benutzen Sie dies und den Fundamentalsatz der Algebra um zu zeigen, dass es $m \in \mathbb{N}$ und Polynome $q_1, q_2, \ldots, q_m \in \mathbb{R}[x]$ gibt, die alle den Grad 1 oder 2 haben, so dass
$$p(x) = \prod_{k=1}^{m} q_k(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Sei $p \in \mathbb{C}[z]$,
$$p(z) = z^3 - 5z^2 - 6iz + 4 + 6i.$$
Berechnen Sie die Faktorisierung von p in Linearfaktoren.

Die Lösungen sind am 13.12.2007 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.