

Mathematik für Informatiker I
Serie 5

1. Sei G Gruppe und seien U, V Untergruppen von G . Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Beispiel) die folgenden Aussagen:
 - (i) $U \cap V$ ist Untergruppe;
 - (ii) $U \cup V$ ist Untergruppe.
2. Sei $G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ und sei $*$ die durch $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ definierte Verknüpfung auf G . Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist.

Sei P die Menge der Polynome auf \mathbb{R} vom Grad 1 und sei \circ die Komposition von Funktionen. Zeigen Sie, dass auch (P, \circ) eine Gruppe ist.

Zeigen Sie weiterhin, dass $(G, *)$ und (P, \circ) isomorph sind.
3. Überprüfen Sie, ob $[15]_{48}$, $[25]_{48}$ und $[35]_{48}$ im Ring \mathbb{Z}_{48} bezüglich der Multiplikation invertierbar sind. Berechnen Sie gegebenenfalls das inverse Element.
4. Zeigen Sie, dass die reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation reeller Zahlen einen Körper bilden.

(Es darf vorausgesetzt werden, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper ist und dass $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.)

Die Lösungen sind am 29.11.2007 zu Beginn der Übung beim Übungsleiter abzugeben.