Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2007/08

Mathematik für Informatiker I
Serie 2

1. Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen. Für natürliche Zahlen m und n schreiben wir $m|n$, falls m ein Teiler von n ist, also n ein Vielfaches von m. Schreiben Sie die folgenden Aussagen (a) und (b) als deutschen Satz und schreiben Sie die Aussagen (c) und (d) mit Hilfe von Quantoren als Formel

   (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, p \in \mathbb{P} : n < p \wedge p \leq 2n$

   (b) $\forall\, n \in \mathbb{N} : ((n \geq 4 \wedge 2|n) \Rightarrow \ \exists\, p \in \mathbb{P}\, \exists\, q \in \mathbb{P} : n = p + q)$

   (c) Jede Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 1 liefert, kann als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden.

   (d) Es gibt eine Quadratzahl, die als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden kann. Die entsprechende Aussage für dritte und höhere Potenzen natürlicher Zahlen ist falsch.

   Dabei ist in (c) und (d) mit Quadratzahl das Quadrat einer natürlichen Zahl gemeint.

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sei

$$R := \{(4,1), (4,4), (5,5), (3,6), (1,5), (3,3), (5,4), (1,1), (6,6)\}.$$

   (a) Überprüfen Sie, ob die Relation R auf M reflexiv, symmetrisch, transitiv ist.

   (b) Welche Elemente aus $M \times M$ müssen R mindestens hinzugefügt werden, um insgesamt eine Äquivalenzrelation zu erhalten? Wie sehen dann die Äquivalenzklassen aus?

Die Lösungen sind bis zum 09.11.2007 ins Fach des Übungsleiters einzuwerfen.