Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2015

Mathematik für Physiker IV
Serie 6

1. Sei $a > b > 0$. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx.$$

2. Sei $a > 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f(z) = e^z + (z+a)^n$ genau n Nullstellen in $K(-a, 1)$ hat.

   Zusatz: Zeigen Sie, dass f keine mehrfachen Nullstellen hat.

3. Orthogonalisieren Sie die Polynome $1, x, x^2, x^3$ bezüglich des durch
$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x} dx$$
gegebenen Skalarproduktes.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Q_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Zeigen Sie, dass die Q_n ein Orthogonalsystem bezüglich des Skalarproduktes
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad \text{bilden.}$$

   Bemerkung: Aus Aufgabe 2 folgt, dass $Q_n(x) = 2^n n! P_n(x)$ mit dem Legendre-Polynom $P_n(x)$ gilt. Diese Gleichung heißt auch *Rodriguessche Formel.*

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 01.07.2015, vor der Vorlesung abzugeben.