Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2015

Mathematik für Physiker IV
Serie 5

1. Sei $a \in K(0,1)$. Zeigen Sie, dass durch

$$T(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

eine bijektive, holomorphe Funktion $T\colon K(0,1) \to K(0,1)$ gegeben ist.

2. Sei $a \in (0,1)$ und sei $T\colon K(0,1) \to K(0,1)$ wie in Aufgabe 1. Sei

$$\varrho = \frac{a}{1+a^2}.$$

Zeigen Sie, dass

$$T\left(\partial K(0,a)\right) = \partial K(\varrho,\varrho), \quad T\left(K(0,a)\right) = K(\varrho,\varrho)$$

und

$$T\left(K(0,1)\backslash\overline{K}(0,a)\right) = K(0,1)\backslash\overline{K}(\varrho,\varrho).$$

3. Sei $0 < \varrho < \frac{1}{2}$ und $\Omega = K(0,1)\backslash\overline{K}(\varrho,\varrho)$. Lösen Sie das Dirichlet-Problem in Ω mit den Randwerten $u(z) = 0$ für $|z| = 1$ und $u(z) = 1$ für $|z-\varrho| = \varrho$. (Das heißt, finden Sie eine stetige Funktion $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, die in u harmonisch ist und die obigen Randwerte hat.) Berechnen Sie insbesondere $u(-1/2)$.

4. Die durch

$$f(z) = \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{(z-1)(z-2)}$$

gegebene Funktion f hat isolierte Singularitäten in den Punkten 0, 1 und 2. Untersuchen Sie, ob es sich um hebbare Singularitäten, Polstellen oder wesentliche Singularitäten handelt.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 17.06.2015, vor der Vorlesung abzugeben.