Mathematik für Physiker IV
Serie 4

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass

$$\Delta u(re^{i\varphi}) = \frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(re^{i\varphi})}{\partial \varphi^2}.$$

2. Sei $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z| < r_2\}$ und sei $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Sei $I\colon (r_1, r_2) \to \mathbb{R}$,

$$I(r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta.$$

Zeigen Sie, dass $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $I(r) = \alpha \log r + \beta$.

Hinweis: Definieren Sie

$$J(r) = r \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(re^{i\theta})}{\partial r} d\theta$$

und zeigen Sie unter Benutzung von Aufgabe 1, dass $J(r)$ konstant ist, etwa $J(r) = \alpha$. Folgern Sie hieraus, dass $I(r) - \alpha \log r$ konstant ist.

3. Für $a, b > 0$ ist

$$E(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}\colon \left(\frac{\operatorname{Re} z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{b}\right)^2 < 1\right\}$$

eine Ellipse mit Halbachsen a und b. Eine Parametrisierung des Randes $\partial E(a,b)$ ist durch $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a\cos t + i\, b \sin t$, gegeben.

Zeigen Sie, dass die durch

$$T(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

definierte Funktion T für $R > 1$ den Kreisrand $\partial K(0,R)$ auf $\partial E((R^2+1)/2R, (R^2-1)/2R)$ und $\partial K(0,1)$ auf $[-1,1]$ abbildet.

Sei u die Lösung des Dirichlet-Problem in $\Omega = E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}) \setminus [-1,1]$ mit Randwerten $u(z) = 0$ für $z \in [-1,1]$ und $u(z) = 1$ für $z \in \partial E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$, d.h., $u\colon \overline{E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $\overline{E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})}$, harmonisch in Ω und hat die oben angegebenen Randwerte.

Berechnen Sie $u(x)$ für $1 < x < \frac{5}{4}$ und $u(iy)$ für $0 < y < \frac{3}{4}$.

Hinweis. Die Lösung des Dirichlet-Problems für einen Kreisring $\{z\colon 1 < |z| < R\}$, mit Randwerten 0 auf dem inneren Rand und Randwerten 1 auf dem äußeren Rand ist durch $z \mapsto \log|z|/(\log R)$ gegeben.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 03.06.2015, vor der Vorlesung abzugeben.