

Mathematik für Physiker IV
Serie 3

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgende Integrale:

$$(1) \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3},$$

$$(2) \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)},$$

$$(3) \int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+i} dz.$$

2. Untersuchen Sie, ob es holomorphe Funktionen $f, g: K(0, 2) \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$$

bzw.

$$g\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{1}{2n^2+1}$$

gilt.

3. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und seien $A, B, C \geq 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte

$$|f(z)| \leq A + B|z|^C.$$

Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad $\leq C$ ist.

4. Sei $a \geq 2$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f(z) = e^z + (z+a)^n$ eine Nullstelle in $K(-a, 1)$ hat.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 20.05.2015, vor der Vorlesung abzugeben.