Mathematik für Physiker IV
Serie 2

1. Für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\sqrt[n]{z} := z^{1/n}$ der Hauptwert der Wurzel gemäß Vorlesung. Für welche z gilt $(\sqrt[n]{z})^n = z$? Für welche z gilt $\sqrt[n]{z^n} = z$?

2. Der Tangens ist definiert durch
$$\tan\colon \mathbb{C} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\colon k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = i\frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}.$$
Sei $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{it\colon t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$ und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$,
$$f(z) = \int_{[0,z]} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2}.$$
Sei $S = \left\{ z \in \mathbb{C}\colon |\text{Re } z| < \frac{\pi}{2} \right\}$. Zeigen Sie: Ist $z \in S$, so gilt $\tan z \in \Omega$ und $f(\tan z) = z$.

3. Zeigen Sie, dass
$$2\int_0^\infty \cos(2t^2)dt = 2\int_0^\infty \sin(2t^2)dt = \int_0^\infty \exp(-t^2)dt.$$
Anleitung: Definieren Sie $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(-z^2)$ und benutzen Sie den Cauchy-Integralsatz, um einzusehen, dass
$$\int_{[0,R]} f(z)dz + \int_{[R,R+iR]} f(z)dz + \int_{[R+iR,0]} f(z)dz = 0.$$
für alle $R > 0$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass
$$\lim_{R\to\infty} \int_{[R,R+iR]} f(z)dz = 0$$
gilt.

Bemerkung: Es gilt $\int\limits_0^\infty \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Die *Rotation* rot F ist definiert durch
$$\text{rot } F(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y).$$
Sei $A \subset \Omega$ ein kompaktes, Jordanmessbares Flächenstück, dass von einer einfach geschlossenen Kurve γ berandet wird. Dabei liege jeder Punkt des Inneren von γ in A und γ umlaufe das Innere von A im Gegenuhrzeigersinn. Die Greensche Formel (siehe zum Beispiel §9 der Vorlesung von Herrn Gnewuch) besagt, dass unter diesen Voraussetzungen
$$\int_A (\text{rot } F)(x,y)\; d(x,y) = \int_\gamma \langle F(s), ds\rangle$$

gilt.

Folgern Sie aus der Greenschen Formel, dass unter den obigen Voraussetzungen an A und γ für eine reell differenzierbare Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i \int_A \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\ d(x,y)$$

gilt.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 06.05.2015, vor der Vorlesung abzugeben.