Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2015

Mathematik für Physiker IV
Serie 1

1. Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

$$\frac{7-4i}{3+4i}, \qquad \left(\sqrt{5}-i\sqrt{3}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2015}.$$

2. Sei $f\colon \mathbb{C}\backslash(-\infty,0] \to \mathbb{C}$,

$$f(z)=\frac{|z|+z}{\sqrt{2(|z|+\mathrm{Re}\ z)}}\ .$$

   Zeigen Sie, dass $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$. Zeigen Sie weiter, dass f holomorph ist und berechnen Sie f'.

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ total differenzierbar. Sei

$$G = \{(r,\varphi)\colon r>0,\ \varphi\in\mathbb{R},\ re^{i\varphi}\in\Omega\}$$

   und sei $F\colon G \to \mathbb{C}$, $\quad F(r,\varphi) = f(re^{i\varphi})$. Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn

$$r\,\frac{\partial F}{\partial r}(r,\varphi) = -i\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r,\varphi)$$

   für alle $(r,\varphi)\in G$.

4. Sei $h\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to \mathbb{C}$ definiert durch $h(re^{i\varphi}) = \sqrt{r}\ e^{i\varphi/2}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3, dass h holomorph ist. Zeigen Sie weiter, dass mit f wie in Aufgabe 2 $f = h$ gilt.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 21.04.2015, vor der Vorlesung abzugeben.