Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2011

Mathematik IV (für Physiker)
Serie 10

1. Sei $f \in C^2[-1,1]$ und sei $g \in C[-1,1]$ definiert durch

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}f(x)\right).$$

   Sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, p(x)\, dx = 0$$

   für jedes Polynom p vom Grad höchstens k. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\int_{-1}^{1} g(x)\, p(x)\, dx = 0$$

   für jedes Polynom p vom Grad höchstens k gilt.

2. Zeigen Sie, dass das Legendre-Polynom P_n vom Grad n der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\,\frac{d}{dx}\,P_n(x)\right) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

   genügt.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die linke Seite in obiger Differentialgleichung ein Polynom vom Grad höchstens $n-1$ ist und benutzen Sie Aufgabe 1.

   Bemerkung: Die Differentialgleichung in Aufgabe 4 wird oft auch in der Form

$$(1-x^2)\, P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

   geschrieben.

Abgabe: Dienstag, den 28.06.11, vor der Übung