Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2011

Mathematik IV (für Physiker)
Serie 7

1. Für $a, b > 0$ ist

$$E(a,b) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \left(\frac{\operatorname{Re} z}{a}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z}{b}\right)^2 < 1\right\}$$

eine Ellipse mit Halbachsen a und b. Eine Parametrisierung des Randes $\partial E(a,b)$ ist durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a\cos t + i\, b\sin t$, gegeben.

Zeigen Sie, dass die durch

$$T(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

definierte Funktion T für $R > 1$ den Kreisrand $\partial K(0,R)$ auf $\partial E((R^2+1)/2R, (R^2-1)/2R)$ und $\partial K(0,1)$ auf $[-1,1]$ abbildet.

Sei u die Lösung des Dirichlet-Problem in $\Omega = E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}) \setminus [-1,1]$ mit Randwerten $u(z) = 0$ für $z \in [-1,1]$ und $u(z) = 1$ für $z \in \partial E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$, d.h., $u : \overline{E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $\overline{E(\frac{5}{4}, \frac{3}{4})}$, harmonisch in Ω und hat die oben angegebenen Randwerte. Berechnen Sie $u(x)$ für $1 < x < \frac{5}{4}$ und $u(iy)$ für $0 < y < \frac{3}{4}$.

Hinweis. Die Lösung des Dirichlet-Problems für einen Kreisring $\{z : 1 < |z| < R\}$, mit Randwerten 0 auf dem inneren Rand und Randwerten 1 auf dem äußeren Rand ist durch $z \mapsto \log|z|/(\log R)$ gegeben.

2. Die durch

$$f(z) = \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z-1)(z-2)}$$

gegebene Funktion f hat isolierte Singularitäten in den Punkten $0, 1$ und 2. Untersuchen Sie, ob es sich um hebbare Singularitäten, Polstellen oder wesentliche Singularitäten handelt.

Abgabe: Dienstag, den 31.05.11, vor der Übung