Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2011

Mathematematik IV (für Physiker)
Serie 3

Der Tangens ist definiert durch

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}.$$

1. Sei $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{ it : t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1 \}$ und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\quad f(z) = \displaystyle\int_{[0,z]} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2}$.
   Sei $S = \{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2} \}$. Zeigen Sie: Ist $z \in S$, so gilt $\tan z \in \Omega$ und $f(\tan z) = z$.

2. Zeigen Sie, dass

$$2 \int_0^\infty \cos(2t^2) dt = 2 \int_0^\infty \sin(2t^2) dt = \int_0^\infty \exp(-t^2) dt.$$

   Anleitung: Definieren Sie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(-z^2)$ und benutzen Sie den Cauchy-Integralsatz, um einzusehen, dass

$$\int_{[0,R]} f(z) dz + \int_{[R,R+iR]} f(z) dz + \int_{[R+iR,0]} f(z) dz = 0.$$

   für alle $R > 0$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $\lim\limits_{R \to 0} \int\limits_{[R,R+iR]} f(z) dz = 0$ gilt.

   Bemerkung: Es gilt $\int\limits_0^\infty \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Abgabe: Dienstag, den 03.05.11, vor der Übung