Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2011

Mathematik IV (für Physiker)
Serie 1

1. Sei $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(|z| + \operatorname{Re} z)}}$$

   Zeigen Sie (mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen), dass f holomorph ist und bestimmen Sie f'.
   Zeigen Sie außerdem, dass $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ total differenzierbar.
   Sei $G = \{(r, \varphi) : r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R},\ re^{i\varphi} \in \Omega\}$ und sei $F : G \to \mathbb{C}$, $\quad F(r, \varphi) = f(re^{i\varphi})$.
   Zeigen Sie, dass f genau dann holomorph ist, wenn

$$r\,\frac{\partial F}{\partial r}\,(r, \varphi) = -i\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\,(r, \varphi)$$

   für alle $(r, \varphi) \in G$.

Abgabe: Dienstag, den 19.04.11, vor der Übung