Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2006

Mathematik für Informatiker II
Übungsaufgaben zur Klausurvorbereitung

1. Was ist
   - ein Eigenwert (einer linearen Abbildung)?
   - das orthogonale Komplement (einer Teilmenge eines Skalarproduktraums)?
   - der Rang einer Matrix?
   - die Jacobi-Matrix (einer differenzierbaren Abbildung)?
   - die Hesse-Matrix?
   - eine Richtungsableitung?
2. Vervollständigen Sie die folgenden Definitionen:
   - Eine Teilmenge M eines normierten Raumes V heißt abgeschlossen, wenn ...
   - Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt unitär, wenn ...
   - Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, heißt total differenzierbar, wenn ...
   - Eine Abbildung $\varphi : V \to W$, wobei V und W $K-$Vektorräume sind, heißt linear, wenn ...
   - Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, wobei V ein K-Vektorraum ist, heißt selbstadjungiert, wenn ...
3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & & & + & \alpha x_3 & = & \beta \end{array}$$
   in Abhängigkeit von den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. Berechnen Sie die Determinante von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
5. Ergänzen Sie $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.
6. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie eine Basis B aus Eigenvektoren und bestimmen Sie $T_B^E, T_E^B, \left(M_B^E\right)_{L_A}, \left(M_E^B\right)_{L_A}$ und $\left(M_B^B\right)_{L_A}$.

7. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -a & b \end{pmatrix}$ invertierbar?

8. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & -12 \end{pmatrix}$$

9. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von $A^t \cdot A$ reell sind.

10. Bestimmen Sie $\overline{M}, \overset{\circ}{M}, \partial M$ für die folgenden Mengen M (ohne Beweis):

    (a) $M = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

    (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y < 2 - x^2\}$

    (c) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0 \text{ und } |y| \leq \frac{1}{|x|}\}$

    (d) $([0, 2] \times [0, 2]) \setminus ((0, 1) \times (0, 1)) \subseteq \mathbb{R}^2$

    Skizzieren Sie für (b), (c), (d) die Menge M auch.

11. Es seien K_1 und K_2 kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $K_1 \times K_2$ kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist.

12. Wo ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

    partiell differenzierbar und wo ist f total differenzierbar?
    Bestimmen Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen und untersuchen Sie, wo diese stetig sind.
    Bestimmen Sie auch alle existierenden Richtungsableitungen.