Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2006

Mathematik für Informatiker II
Serie 10

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^3}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Untersuchen Sie, wo f total und wo f partiell differenzierbar ist. Bestimmen Sie auch alle existierenden Richtungsableitungen.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Berechnen Sie $D_1 D_2 f(0,0)$ und $D_2 D_1 f(0,0)$.

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sei $h : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Zeigen Sie, dass $h \in C^1(\Omega)$ und dass $\operatorname{grad} h(x) = g(x)^t \cdot J_f(x) + f(x)^t \cdot J_g(x)$ für $x \in \Omega$.

4. Sei

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \; g : \Omega \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2\sqrt{3x^2+y^2} \\ 2y \end{pmatrix}$$

   und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v^2 - 4u^2 \\ u \cdot v \end{pmatrix}.$$

   Sei $F = f \circ g$. Berechnen Sie $J_F(1,1)$ einmal direkt und einmal mit Hilfe der Kettenregel.

Abgabe: Montag, den 26.06.06, 9.00 Uhr