Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2006

Mathematik für Informatiker II
Serie 9

1. Sei V normierter Raum und $A, B \subseteq V$ kompakt.

   a) Zeigen Sie, dass $A + B = \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$ kompakt ist.

   b) Zeigen Sie, dass $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ existieren, so dass $\|a_0 - b_0\| \leq \|a - b\|$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

   Bemerkung: Die entsprechenden Aussagen für A, B abgeschlossen gelten nicht, selbst wenn $V = \mathbb{R}$.

2. Sei $V = C[0,1]$, versehen mit der Norm $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Zeigen Sie, dass durch

$$I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

   eine stetige Abbildung $I : V \to V$ definiert wird.

3. Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y > \frac{1}{2}\}$ und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \ln(2y + \sin(x\sqrt{y})).$$

   Berechnen Sie sämtliche zweiten partiellen Ableitungen von f und werten Sie diese an der Stelle $(x, y) = (\pi, 1)$ aus.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

Abgabe: Montag, den 19.06.06, 9.00 Uhr.