Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2006

Mathematik für Informatiker II
Serie 8

1. Sei V Skalarproduktraum und seien (u_n) und (v_n) konvergente Folgen in V. Zeigen Sie, dass $(\langle u_n, v_n\rangle)$ eine konvergente Folgen von Zahlen in $\mathbb{K}$ ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v_n\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} u_n, \lim_{n\to\infty} v_n\rangle$$

gilt.

2. Sei $V = C[0,1]$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \in V$ definiert durch $g_n(x) = x^n$. Untersuchen Sie für die Normen $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ und $||f||_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ auf V, ob (g_n) konvergiert.

3. Bestimmen Sie $\overline{M}, \overset{\circ}{M}, \partial M$ und $\overline{\overset{\circ}{M}}$ für die folgenden Mengen M :

   a) $M = (0,1] \times [2,3] \times [4,5) \subset \mathbb{R}^3$,

   b) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2,\ y \geq x \text{ und } y \geq |x|\}$.

4. a) Seien A und B Teilmengen eines normierten Raumes. Eine der beiden Mengen A und B sei offen. Zeigen Sie, dass dann auch

$$A + B := \{a + b : \ a \in A,\ b \in B\}$$

   offen ist.

   b) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$ und sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Bestimmen Sie $A + B$.

Abgabe: Montag, den 12.06.06, 9.00 Uhr.