Mathematik für Informatiker II
Serie 7

1. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt nilpotent, falls $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$ existiert.

   a) Zeigen Sie, dass nilpotente Matrizen den Eigenwert $\lambda = 0$, aber keine anderen Eigenwerte haben.

   b) Zeigen Sie, dass
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   nilpotent ist und bestimmen Sie $N_0(A)$.

2. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von
   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) über $\mathbb{R}$,

   b) über $\mathbb{C}$.

3. Sei K Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie:

   a) $p_{A^t}(x) = p_A(x)$.

   b) Ist A invertierbar, so gilt
   $$p_{A^{-1}}(x) = \frac{(-x)^n}{\det A}\, p_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Sei
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit $A = T \cdot D \cdot T^t$.

5. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist
   $$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   positiv oder negativ definit?

6. Berechnen Sie die Grenzwerte der unten angegebenen Folgen (a_n), falls diese existieren.

   a) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n}(4n+5)}{(6n+7)\sqrt{8n+9}}$

   b) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+3}\right)^{2n}$

7. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x^2}) & \text{falls} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung f'. Untersuchen Sie, wo f' stetig ist.

8. Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   a) $f(x) = \ln(x^2+1) + \dfrac{4x+2}{x^2+1}$

   b) $f(x) = \arctan x - \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$

Abgabe: Freitag, den 02.06.06, 9.00 Uhr.