Mathematik für Informatiker II
Serie 6

1. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Die Abbildung $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei eine Hyperebenenspiegelung. Zeigen Sie, dass $\det(A) = -1$ gilt.

2. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 - x_1 \end{pmatrix}$ und sei
$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
Zeigen Sie, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
Sei
$$E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.
Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen T_E^B und T_B^E sowie die Matrizen $(M_E^E)_\varphi$ und $(M_B^B)_\varphi$.

3. Sei
$$b_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
Zeigen Sie, dass $b_3 \in \mathbb{R}^3$ existiert, so dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine ONB von $\mathbb{R}^3$ ist.
Sei S_1 die Spiegelung an $b_1^\perp$ und S_2 die Spiegelung an $b_2^\perp$.
Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi = S_1 \circ S_2$. Berechnen Sie
$$(M_B^B)_\varphi \text{ und } (M_E^E)_\varphi,$$
wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.
Interpretieren Sie die Abbildung φ anschaulich.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n. Die Abbildung $\varphi : V \to V$ sei wie folgt definiert: Ist $p \in V$, so sei $\varphi(p)(x) = x \cdot p'(x)$. Zeigen Sie, dass φ linear ist und berechnen Sie $\det(\varphi)$.

Abgabe: Montag, den 22.05.06, 9.00 Uhr.