Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2006

Mathematik für Informatiker II
Serie 5

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sei $C[a,b]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$
ein Skalarprodukt auf $C[a,b]$ definiert wird.

2. Sei $V = C[-\pi, \pi]$ mit dem in Aufgabe 1 definierten Skalarprodukt.
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n \in V$ definiert durch
$$f_n(x) = \begin{cases} \cos(\frac{n}{2}x) & \text{falls} \quad n \quad \text{gerade,} \\ \sin(\frac{n+1}{2}x) & \text{falls} \quad n \quad \text{ungerade.} \end{cases}$$
Es ist also $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), ...$ gegeben durch $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, ...$. Zeigen Sie, dass die f_n ein Orthogonalsystem bilden.

3. Sei $V = C[0,1]$ mit dem in Aufgabe 1 definierten Skalarprodukt. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n : V \to V$ definiert durch $g_n(x) = x^n$. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von $\text{span}(g_0, g_1.g_2, g_3)$.

4. Beweisen Sie Satz 19.1 der Vorlesung. Zeigen Sie außerdem, dass unter den Voraussetzungen dieses Satzes
$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$
gilt. Warum heißt die letzte Gleichung Parallelogrammidentität?

Abgabe: Montag, den 15.05.06, 9.00 Uhr.