Mathematik für Informatiker II
Serie 1

1. Axel, Bruno, Dieter und Ernst sind die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hat jeder gegen jeden zweimal zu spielen – ein Spiel und ein Rückspiel. Für eine gewonnene Partie wird 1 Punkt, für eine unentschiedene $\frac{1}{2}$ Punkt, für eine verlorene kein Punkt vergeben. Nach Abschluss des Turniers stellt sich heraus:

   (a) Bruno und Dieter erzielten zusammen einen Punkt mehr als Axel und Ernst zusammen erreichten.

   (b) Dieter und Ernst erkämpften zusammen 7 Punkte

   (c) Axel und Dieter erreichten zusammen 5 Punkte weniger als Bruno und Ernst zusammen.

   Wie viele Punkte errang nach diesen Angaben jeder der vier Teilnehmer?

   Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, welches obige Aufgabe modelliert.

2. Beweisen Sie folgende Umkehrung von Satz 15.1, (a), der Vorlesung: Ist K Körper, $n \in \mathbb{N}$ und L Teilraum von K^n, so existiert ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge L ist.

3. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\
x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
3x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 0
\end{array}
$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Zeilenraums sowie eine Basis des Spaltenraums der zugehörigen Koeffizientenmatrix.

4. Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & ... & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit Koeffizienten aus einem Körper K.
Es sei

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m : \text{ das Gleichungssystem ist lösbar} \right\}$$

und

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m : \text{ das Gleichungssystem ist nicht lösbar} \right\}.$$

Untersuchen Sie, welche der Mengen M_1 und M_2 Teilraum von K^m ist.

Abgabe: Donnerstag, den 13.04.06