Prof. Dr. Walter Bergweiler Wintersemester 2012/13

Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 11

Das Innere einer geschlossenen, stückweise glatten Kurve γ in $\mathbb{C}$ ist die Menge aller Punkte z aus dem Komplement der Spur von γ, für die die Windungszahl

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} d\zeta$$

von Null verschieden ist. Ein Gebiet G ist einfach zusammenhängend, wenn für jede geschlossene Kurve γ in G auch ihr Inneres in G ist. Andernfalls ist das Gebiet mehrfach zusammenhängend.

1. Sei f ganz transzendent und sei U eine mehrfach zusammenhängende Komponente von $F(f)$. Zeigen Sie, dass $f^n|_U \to \infty$ für $n \to \infty$.

2. Sei f ganze, periodische Funktion mit der Periode $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, d.h. $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die ganzen Funktionen g, h seien definiert durch $g(z) = z + f(z)$ und $h(z) = z + \omega + f(z)$. Zeigen Sie:

   (i) $J(f)$ ist vollständig invariant unter der Abbildung $z \mapsto z + \omega$, d.h. für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z \in J(f)$ genau dann, wenn $z + \omega \in J(f)$.

   (ii) $J(g)$ ist vollständig invariant unter der Abbildung $z \mapsto z + \omega$.

   (iii) $J(g) = J(h)$.

3. Die ganze Funktion f sei definiert durch $f(z) = 1 - e^z$ und es seien g, h wie in Aufgabe 3, mit $\omega = 2\pi i$. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion g einen superattraktiven Fixpunkt in $2\pi ik$ hat. Sei $U_k := A^*(2\pi ik)$ der unmittelbare Einzugsbereich von $2\pi ik$ (bzgl. g). Zeigen Sie, dass U_k Komponente von $F(h)$ ist und dass $h(U_k) \subset U_{k+1}$ und $U_k \cap U_{k+1} = \emptyset$ gilt.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 30.1.2013, abzugeben.