Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 9

1. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Es gelte $a_k \geq 0$ für alle k. Zeigen Sie, dass die durch $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ keine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet G mit $\mathbb{D} \cup \{1\} \subset G$ hat.

   Hinweis: Betrachten Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von f um einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (0,1)$.

2. Für eine rationale oder ganze Funktion f sei $C(f)$ die Menge der kritischen Werte von f. Zeigen Sie, dass
$$C(g \circ f) \subset C(g) \cup g(C(f))$$
gilt, wenn f und g beide rational oder beide ganz sind. Zeigen Sie weiter, dass für rationale Funktionen Gleichheit gilt, dass dieses für ganze Funktionen aber im Allgemeinen nicht der Fall ist.

   Zeigen Sie weiterhin, dass für die Menge $A(f)$ der asymptotischen Werte einer ganzen Funktion f analog
$$A(g \circ f) \subset A(g) \cup g(A(f))$$
gilt, falls f und g beide ganz sind.

3. Sei f rational. Alle kritischen Punkte von f seien präperiodisch, aber nicht periodisch. Zeigen Sie, dass f keine attraktiven periodischen Punkte hat. Zeigen Sie außerdem, dass
$$f_1(z) = \frac{(z-2)^2}{z^2} \quad \text{und} \quad f_2(z) = i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4$$
diese Bedingung für f erfüllen.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 16.1.2013, abzugeben.