

Übungen zur Komplexen Dynamik Serie 6

1. Für $c \in \mathbb{C}$ sei $f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 - c$. Zeigen Sie:
 - (i) Für $c \geq 2$ gilt $J(f_c) \subset \mathbb{R}$;
 - (ii) $J(f_2) = [-2, 2]$.
2. Sei f eine rationale oder ganze Funktion. Zeigen Sie, dass die Juliamenge von f einen Punkt enthält, dessen Vorwärtsorbit dicht in $J(f)$ ist, d.h., es existiert $z_0 \in J(f)$ mit $\overline{O^+(z_0)} = J(f)$.

Notation: Für ein nicht-konstantes Polynom P sei die rationale Funktion $N_P : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}.$$

Das *Newton-Verfahren* besteht aus der Iteration von N_P .

3. Sei P ein Polynom vom Grad $d \geq 2$. Zeigen Sie:
 - (i) Eine m -fache Nullstelle von P ist ein Fixpunkt von N_P mit Multiplikator $1 - \frac{1}{m}$,
 - (ii) ∞ ist Fixpunkt von N_P mit Multiplikator $\frac{d}{d-1}$,
 - (iii) Außer in den Nullstellen von P und in ∞ hat N_P keine Fixpunkte.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 12.12.2012, abzugeben.