Prof. Dr. Walter Bergweiler Wintersemester 2012/13

Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 5

1. Seien G und H die unten angegebenen Gebiete. Geben Sie eine biholomorphe Funktion $f\colon G \to H$ an.

   (a) $G = \mathbb{D}$, $H = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$,

   (b) $G = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$, $H = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$,

   (c) $G = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$, $H = \mathbb{D}$,

   (d) $G = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$, $H = \mathbb{D}$,

   (e) $G = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| < 1\}$, $H = \mathbb{D}$,

   Hinweis. Aufgabe 2 der Serie 3 kann teilweise helfen.

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, sei $N \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{F}$ eine Familie in G holomorpher Funktionen. Weiter gelte, dass die Funktionen in $\mathcal{F}$ keine Nullstellen und höchstens N Einsstellen haben (d.h., für $f \in \mathcal{F}$ hat $f - 1$ höchsten N Nullstellen), gezählt gemäß Vielfachheit. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ normal ist.

3. Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiet, sei $\varepsilon > 0$ und sei $\mathcal{F}$ eine Familie in G meromorpher Funktionen. Für alle $f \in \mathcal{F}$ mögen drei Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ existieren, so dass $\chi(a_j, a_k) \geq \varepsilon$ für $j \neq k$ und so dass $f(z) \neq a_j$ für alle $z \in G$ und alle $j \in \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ normal ist.

4. Sei f eine nicht konstante ganze Funktion, die keine Translation ist (d.h., f hat nicht die Form $f(z) = z + c$ mit $c \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass $f \circ f$ einen Fixpunkt hat.

   Hinweis: Wenden Sie den Satz von Picard auf die durch
   $$z \mapsto \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}$$
   definierte Funktion an.

5. Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiet und $f\colon G \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph. Sei H Gebiet mit $\overline{H} \subset G$. Es gelte $f(H) \subset H$ und es sei $\left\{ f^n\big|_H \colon n \in \mathbb{N} \right\}$ normal. Weiter sei $f\colon H \to H$ nicht bijektiv. Zeigen Sie, dass $a \in \overline{H}$ mit $f(a) = a$ existiert, so dass $f^n \to a$ lokal gleichmäßig in H ist.

6. Seien $a, b \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ und seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az$, $g(z) = bz$. Zeigen Sie, dass f und g konjugiert sind, d.h., dass ein Homöomorphismus $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $T \circ f = g \circ T$ existiert.

   Hinweis. Benutzen Sie den Ansatz $T(re^{it}) = r^\gamma e^{i(t + \delta \log r)}$ mit $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Die Lösungen sind bis Mittwoch, den 05.12.2012, abzugeben.