Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 3

Definition: Eine Möbiustransformation der Form $z \mapsto z + b$ mit $b \in \mathbb{C}$ heißt Translation, eine der Form $z \mapsto az$ mit $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ heißt Drehstreckung und die durch $z \mapsto 1/z$ gegebene Möbiustransformation heißt Inversion.

1. Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation als Hintereinanderausführung von Translationen, Drehstreckungen und Inversionen geschrieben werden kann.

2. Sei K die Menge aller Kreise in $\mathbb{C}$ und G die Menge aller mit dem Punkt ∞ vereinigten Geraden in $\mathbb{C}$. Sei T Möbiustransformation. Zeigen Sie, dass $T(K \cup G) \subset K \cup G$.

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.

3. Sei F eine normale Familie von in $D(0, 1)$ holomorphen Funktionen, so dass $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ für alle $f \in F$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $r > 0$ existiert, so dass $D(0, r) \subset f(D(0, 1))$ für alle $f \in F$ gilt.

4. Seien $G, H \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiete, sei $g : G \to H$ meromorph und nicht konstant und sei F eine Familie in H meromorpher Funktionen. Zeigen Sie, dass für $z_0 \in G$ die Familie F genau dann normal in $g(z_0)$ ist, wenn $\{f \circ g : f \in F\}$ normal in z_0 ist.