KOMPLEXE DYNAMIK

WALTER BERGWEILER

Vorlesung an der CAU Kiel
Wintersemester 2012/13
Fassung vom 15. März 2013

Inhaltsverzeichnis

Empfohlene Literatur

1. A. F. Beardon, *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, 1991.
2. F. Berteloot und V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, EDP Sciences, 2001.
3. L. Carleson und T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
4. J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, Princeton University Press, 2006.
5. S. Morosawa et al., *Holomorphic dynamics*, Cambridge University Press, 2000.
6. N. Steinmetz, *Rational iteration*, Walter de Gruyter, 1993.

1. Einleitung und Beispiele

Sei X eine Menge und sei $f\colon X \to X$ eine Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man die Iterierten f^n durch $f^1 := f$ und $f^n := f \circ f^{n-1}$. Wir untersuchen die Frage, was man über das Verhalten der Folge (f^n) bzw. der Folgen $(f^n(x))$ mit $x \in X$ für $n \to \infty$ sagen kann. Üblicherweise haben f und X dabei weitere Eigenschaften. So ist etwa X im Allgemeinen ein metrischer Raum und f ist stetig.

Iteration taucht in verschiedenen Zusammenhängen auf, etwa bei der Modellierung von naturwissenschaftlichen oder technischen Phänomenen oder bei numerischen Verfahren. Typischerweise treten dabei folgende Fragen auf:

(1) Konvergiert die Folge (f^n) oder gibt es zumindest konvergente Teilfolgen?
(2) Ist für y nahe bei x das Verhalten der Folge $(f^n(y))$ ähnlich zu dem der Folge $(f^n(x))$?
(3) Ist für g nahe bei f das Verhalten der Folge (g^n) ähnlich zu dem der Folge (f^n)?

Wir untersuchen hier den Fall, dass $X \subset \mathbb{C}$ gilt und dass die Funktion f holomorph ist. (Allgemeiner werden wir den Fall $X \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachten, wobei das Hinzufügen des Punktes ∞ in §2 noch genauer definiert und untersucht wird.)

Zunächst betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1. Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=z^2$. Dann gilt $f^n(z)=z^{2^n}$ und

$$f^n(z)\to 0 \text{ für } n\to\infty \text{ falls } |z|<1$$

während

$$|f^n(z)|\to\infty \text{ für } n\to\infty \text{ falls } |z|>1.$$

Sei nun $z\in\mathbb{C}, |z|=1$. Dann existiert $\alpha\in[0,1)$ mit $z=e^{2\pi i\alpha}$. Es folgt

$$f^n(z)=(e^{2\pi i\alpha})^{2^n}=e^{2\pi i 2^n\alpha}.$$

Seien $m,n\in\mathbb{Z}, 0\le m<n$, mit $f^n(z)=f^m(z)$. Dann heißt z *präperiodisch* und im Falle $m=0$ *periodisch.* (Dabei ist $f^0=\mathrm{id}$.)

Wir untersuchen $z=e^{2\pi i\alpha}$ auf (Prä-)Periodizität. Gilt $f^n(z)=f^m(z)$, so folgt $e^{2\pi i2^n\alpha}=e^{2\pi i 2^m\alpha}$ und damit $e^{2\pi i(2^n-2^m)\alpha}=e^{2\pi i 2^n\alpha-2\pi i 2^m\alpha}=1$. Also existiert $\ell\in\mathbb{Z}$ mit $\ell=(2^n-2^m)\alpha$, so dass

$$\alpha=\frac{\ell}{2^n-2^m}\in\mathbb{Q}.$$

Sei umgekehrt $\alpha\in\mathbb{Q}$, etwa $\alpha=p/q$. Dann existieren $m,n\in\mathbb{Z}$, $0\le m<n$, mit $2^np\equiv 2^mp \pmod q$, also $(2^n-2^m)p\equiv 0 \pmod q$, etwa $(2^n-2^m)p=\ell q$ mit $\ell\in\mathbb{Z}$. Insgesamt folgt:

(i) $e^{2\pi i\alpha}$ ist präperiodisch genau dann, wenn $\alpha\in\mathbb{Q}$;
(ii) $e^{2\pi i\alpha}$ ist periodisch genau dann, wenn $\ell\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ mit $\alpha=\frac{\ell}{2^n-1}$ existieren.

Insbesondere folgt: *Periodische Punkte sind dicht in* $\{z\colon |z|=1\}$.

Analog sieht man, dass

$$\begin{aligned}\{z\in\mathbb{C}\colon \text{ es existiert } n\in\mathbb{N} \text{ mit } f^n(z)=1\} &= \{e^{2\pi i\alpha}\colon \text{ es existiert } n\in\mathbb{N} \text{ mit } 2^n\alpha\in\mathbb{Z}\}\\ &= \left\{e^{2\pi i\alpha}\colon \text{ es existieren } \ell,n\in\mathbb{N} \text{ mit } \alpha=\frac{\ell}{2^n}\right\}\end{aligned}$$

dicht in $\{z\colon |z|=1\}$ ist. Allgemeiner gilt: Für jedes $z_0\in\mathbb{C}$ mit $|z_0|=1$ ist die Menge $\{z\in\mathbb{C}\colon \text{ es existiert } n\in\mathbb{N} \text{ mit } f^n(z)=z_0\}$ dicht in $\{z\colon |z|=1\}$.

Für eine genauere Analyse betrachten wir für eine Zahl $\alpha\in[0,1)$ die durch

$$\alpha=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j}{2^j},\quad \alpha_j\in\{0,1\}$$

definierte Zahlenfolge $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$, wobei (um Eindeutigkeit zu erzielen) Folgen mit $\alpha_k=1$ für alle großen k ausgeschlossen sind. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} e^{2\pi i\alpha} & \longleftrightarrow & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\\ \downarrow & & \downarrow\\ f(e^{2\pi i\alpha})=e^{2\pi i2\alpha} & \longleftrightarrow & \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\ldots\end{array}$$

Die Abbildung, die die Folge $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ auf $\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$ abbildet, also $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $(\alpha_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, heißt *Shift.* Es folgt, dass die Funktion $f|_{\{z\colon |z|=1\}}$ äquivalent („konjugiert“) zum Shift auf Folgen ist. Damit kann man etwa zeigen, dass $\alpha\in[0,1)$ existiert, so dass $\{f^n(e^{2\pi i\alpha})\colon n\in\mathbb{N}\}$ dicht in $\{z\colon |z|=1\}$ ist.

Übungsaufgabe. Sei $f(z)=z^2+\lambda z$, wobei $|\lambda|<1$. Man fertige Bilder der Mengen $A=\{z\colon f^n(z)\to 0\}$ und $B=\{z\colon |f^n(z)|\to\infty\}$ an. Es zeigt sich, dass eine Jordankurve C existiert, so dass A Inneres von C und B Äußeres von C ist. Die periodischen Punkte sind dicht in C, wie auch die Urbilder eines beliebigen Punktes in C. (Letzteres kann man auch benutzen, um Bilder von C zu produzieren.) Es existiert auch wieder $z\in C$ mit $\overline{\{f^n(z)\colon n\in\mathbb{N}\}}=C$.

Beispiel 2. (Newton-Verfahren) Sei p Polynom, $p(\xi) = 0$ und

$$f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

Dann gilt $f(\xi) = \xi$ und es existiert $\varepsilon > 0$ mit $f^n(z) \to \xi$ für $n \to \infty$ falls $|z - \xi| < \varepsilon$. (Dies wird aus späteren Sätzen folgen, kann aber auch jetzt als Übungsaufgabe gerechnet werden.) Für einen Startwert z nahe an einer Nullstelle ξ erhält man also ein Verfahren zur Berechnung von ξ. Dieses Verfahren heißt *Newton-Verfahren.*

Frage. Wie sieht die Menge $A(\xi) = \{z \in \mathbb{C} \colon f^n(z) \to \xi\}$ der „guten“ Startwerte aus?

Wir untersuchen die Frage für das Beispiel $p(z) = z^2 - 1$. Dann gilt $p(1) = p(-1) = 0$ und

$$f(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Behauptung. $A(1) = \{z \colon \operatorname{Re} z > 0\}, \quad A(-1) = \{z \colon \operatorname{Re} z < 0\}$.

Beweis. Mit $L(z) = \frac{z+1}{z-1}$ gilt

$$L(f(z)) = \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + 1}{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) - 1} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 2z + 1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = g(L(z))$$

mit $g(z) = z^2$. Also gilt

$$L \circ f = g \circ L$$

und damit

$$L \circ f^n = g^n \circ L.$$

Da $L(w) = 0$ genau dann, wenn $w = -1$, folgt mit Beispiel 1, dass

$$\begin{aligned} f^n(z) \to -1 \quad &\Leftrightarrow \quad L(f^n(z)) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad g^n(L(z)) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |L(z)| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |z+1| < |z-1| \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} z < 0 \end{aligned}$$

Also gilt $A(-1) = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z < 0\}$. Analog folgt $A(1) = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$. ☐

Bemerkung. 1. Die Definitionsbereiche von f und L sind hier nicht genau spezifiziert. Man sollte jeweils $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nehmen.
2. Das Iterationsverhalten von f und g ist äquivalent: f und g sind „konjugiert“.

Übungsaufgabe. Man fertige für ein Polynom vom Grad ≥ 3 Computerbilder der Mengen $A(\xi)$ an.

Beispiel 3. (Tchebychev-Polynome) Für alle $d \in \mathbb{N}$ existiert ein Polynom T_d vom Grad d mit

$$\cos dw = T_d(\cos w)$$

für alle $w \in \mathbb{C}$. Dieses Polynom heißt *Tchebychev-Polynom* vom Grad d. Es gilt $T_1(z) = z$, aber hier betrachten wir nur den Fall $d \geq 2$. Es gilt

$$\begin{aligned} T_2(z) &= 2z^2 - 1, \\ T_3(z) &= 4z^3 - z, \\ T_4(z) &= 8z^4 - 8z^2 + 1 \quad (= \ T_2(T_2(z))). \end{aligned}$$

Per Induktion zeigt man, dass
$$T_d^n = T_{d^n}$$
für $n \in \mathbb{N}$.

Für $x \in [-1,1]$ existiert $w \in \mathbb{R}$ mit $\cos w = x$ und damit gilt $T_d(x) = T_d(\cos w) = \cos dw \in [-1,1]$. Es folgt, dass $T_d([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Behauptung. Für $z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$ gilt $|T_d^n(z)| \to \infty$ für $n \to \infty$

Beweis. Es existiert $w = u + iv$ mit $\cos w = z, v \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v > 0$. Es folgt, dass
$$\begin{aligned}
|T_d^n(z)| &= |\cos(d^n w)| \\
&= \left|\frac{1}{2}\left(e^{id^n w} + e^{-id^n w}\right)\right| \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\left|e^{-id^n w}\right| - \left|e^{id^n w}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{d^n v} - e^{-d^n v}\right) \\
&= \sinh(d^n v),
\end{aligned}$$
also $|T_d^n(z)| \to \infty$. □

Insgesamt erhält man, dass
$$\{z \in \mathbb{C} \colon |T_d^n(z)| \to \infty\} = \mathbb{C}\backslash[-1,1].$$

Übungsaufgabe. Man fertige für andere Polynome p Bilder der Mengen $\{z \colon |p^n(z)| \to \infty\}$ an.

Bemerkung. Wir haben die Gleichung
$$T_d(\cos w) = \cos dw$$
benutzt. Für die vorher betrachtete Funktion $f(z) = z^2$ gilt eine ähnliche Gleichung:
$$f(\exp w) = \exp 2w.$$
Allgemeiner gilt für $M_d(z) = z^d$, dass
$$M_d(\exp w) = \exp dw.$$
Ganz allgemein werden wir später für ein Polynom p eine ganze Funktion Φ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit
$$p(\Phi(w)) = \Phi(\lambda w)$$
finden. Aber Φ ist im Allgemeinen keine „elementare“ Funktion.

2. Riemannsche Zahlenkugel und meromorphe Funktionen

Sei $S^2 := \{(x_1.x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \|x\|_2 = 1\}$, $N := (0,0,1) \in S^2$ und $\varphi \colon S^2 \to \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch
$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, & (x_1,x_2,x_3) \neq N, \\ \infty, & (x_1,x_2,x_3) = N. \end{cases}$$
Für $x \in S^2\backslash N$ gilt, dass die Punkte N, x und $(\mathrm{Re}\,\varphi(x), \mathrm{Im}\,\varphi(x), 0)$ auf einer Geraden in $\mathbb{R}^3$ liegen.

Die Abbildung φ (bzw. $\varphi|_{S^2\setminus N}$) heißt *stereographische Projektion*. Sie ist bijektiv und es gilt

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{|z|^2+1}(2\ \mathrm{Re}\ z, 2\ \mathrm{Im}\ z, |z|^2-1), & z \in \mathbb{C}, \\ N, & z = \infty. \end{cases}$$

Man nennt $\widehat{\mathbb{C}}$ bzw. S^2 *Riemannsche Zahlenkugel*.

Für $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ definiert man den *chordalen Abstand* $\chi(z,w)$ durch

$$\chi(z,w) = \|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(w)\|_2,$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$ ($\supset S^2$) ist, d.h.,

$$\|(x_1,x_2,x_3)\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Ausrechnen zeigt, dass für $z, w \neq \infty$

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}},$$
$$\chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Tatsächlich bildet $\widehat{\mathbb{C}}$ mit dem Abstandsbegriff χ einen *metrischen Raum*, d.h., χ ist eine *Metrik*, die sogenannte *chordale Metrik*. Der metrische Raum $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$ ist nach Konstruktion isometrisch zur mit der euklidischen Metrik versehenen Sphäre S^2.

Wir werden bei Begriffen wie „konvergent" jetzt die chordale Metrik zu Grunde legen. Wir sagen also, dass eine Folge (z_n) in $\widehat{\mathbb{C}}$ (bzgl. χ) gegen $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ konvergiert, falls $\chi(z_n, z_0) \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen $\chi(z,w) \le 2|z-w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$ folgt für $z_n, z_0 \in \mathbb{C}$: *Gilt $z_n \to z_0$ bzgl. der euklidischen Norm, so gilt $z_n \to z_0$ bzgl. des chordalen Abstands.*

Umgekehrt gilt aber auch: *Gilt $z_n \to z_0 \neq \infty$ bzgl. des chordalen Abstands, so gilt auch $z_n \to z_0$ bzgl. der euklidischen Norm.* Denn gilt $z_n \to z_0 \neq \infty$ bzgl. χ, so existieren $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\chi(z_n, \infty) = 2/\sqrt{1+|z_n|^2} \ge \delta$ für $n \ge n_0$ und damit

$$|z_n - z_0| = \frac{1}{2}\chi(z_n, z)\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|z_0|^2} \le \frac{1}{2}\chi(z_n,z)\frac{2}{\delta}\sqrt{1+|z_0|^2} \to 0$$

für $n \ge n_0$, also $|z_n - z_0| \to 0$.

Weiterhin gilt für eine Folge $(z_n) \in \mathbb{C}$, dass $z_n \to \infty$ bzgl. χ genau dann gilt, wenn $|z_n| \to \infty$ im Sinne des uneigentlichen Grenzwerts reeller Zahlenfolgen.

Für $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ sei $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z-a| < r\}$ die Kreisscheibe um a. Analog setzt man für $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ jetzt

$$\widehat{D}(a,r) := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}\colon \chi(z,a) < r\}.$$

Begriffe wie offen, abgeschlossen, kompakt usw. betrachten wir für Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ bzgl. der Metrik χ. So ist also etwa eine Menge $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *offen*, falls zu jedem $z \in M$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\widehat{D}(a,r) \subset M$. Des Weiteren überträgt sich auch der Begriff der Stetigkeit unmittelbar: f heißt stetig (bzgl. χ), falls aus $z_n \to z_0$ folgt, dass $f(z_n) \to f(z_0)$ (bzgl. χ).

Die ε-δ-Definition der Stetigkeit lautet also in Quantorenschreibweise wie folgt:

$$f\colon G \subset \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}} \text{ ist stetig in } z_0 \in G \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\colon \chi(z,z_0) < \delta \Rightarrow \chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon.$$

Man kann dabei $\chi(z,z_0)$ bzw. $\chi(f(z), f(z_0))$ durch $|z-z_0|$ bzw. $|f(z)-f(z_0)|$ ersetzen, falls $z_0 \neq \infty$ bzw. $f(z_0) \neq \infty$.

Eine zusammenhängende offene Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt *Gebiet*. Eine *Umgebung* von z ist eine offene Menge, die z enthält.

Definition 2.1. Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet mit $\infty \in G$. Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls $f|_{G\backslash\{\infty\}}$ holomorph und falls mit $H = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0,\infty\} : 1/z \in G\} \cup \{0\}$ auch $g\colon H \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} f(\frac{1}{z}), & z \neq 0, \\ f(\infty), & z = 0, \end{cases}$$

holomorph ist.

Bemerkung. Nach Kettenregel ist g holomorph in $H\backslash\{0\}$, falls f holomorph in $G\backslash\{\infty\}$ ist. Es kommt also nur auf die komplexe Differenzierbarkeit von g in 0 an.

Es sei an einige Resultate der Analysis III/IV erinnert:

Satz 2.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$ und $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f holomorph fortsetzbar in z_0, d.h., es existiert $F\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F|_{G\backslash\{z_0\}} = f$.*

Folgerung. Der Riemannsche Hebbarkeitssatz gilt auch, falls $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ (denn sind f, g wie in obiger Definition, so ist mit f auch g beschränkt).

Definition 2.2 (Klassifikation isolierter Singularitäten)**.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $z_0 \in G$ und $f\colon G\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist z_0 isolierte Singularität von f und z_0 heißt

(i) *hebbar*, falls f holomorph fortsetzbar in z_0 ist,
(ii) *Pol*, falls $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$,
(iii) *wesentlich*, sonst.

Diese Klassifikation gilt auch für $z_0 = \infty$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist (i) äquivalent dazu, dass f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist.

Satz 2.2 (Casorati-Weierstraß)**.** *Seien f, G, z_0 wie oben. Ist z_0 wesentliche Singularität, so gilt*

$$\overline{f(G\backslash\{z_0\})} = \mathbb{C}$$

Beweis. Andernfalls existiert $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin \overline{f(G\backslash\{z_0\})}$. Da $\overline{f(G\backslash\{z_0\})}$ abgeschlossen und damit $\mathbb{C}\backslash\overline{f(G\backslash\{z_0\})}$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $D(a,\varepsilon) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{f(G\backslash\{z_0\})}$. Es folgt

$$\left|\frac{1}{f(z)-a}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

für $z \in G\backslash\{z_0\}$. Damit hat $z \mapsto 1/(f(z)-a)$ eine hebbare Singularität, etwa $1/(f(z)-a) \to c$ für $z \to z_0$. Es folgt, dass f eine hebbare Singularität hat, falls $c \neq 0$, und f einen Pol hat, falls $c = 0$. $\square$

Ist z_0 Pol von f, so wird durch die Setzung $f(z_0) := \infty$ die Funktion f stetig in z_0 (bzgl. χ).

Definition 2.3. Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet. Eine Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *meromorph*, falls mit $P := f^{-1}(\infty)$ die Funktion f holomorph in $G\backslash P$ ist und jeder Punkt von P ein Pol von f ist.

Bemerkung. 1. Insbesondere wird verlangt, dass jeder Punkt von P *isolierte* Singularität von $F|_{G\backslash P}$ ist, d.h., P hat keine Häufungspunkte in G. (Eine Menge ohne Häufungspunkte heißt auch *diskret*).

2. Meromorphe Funktionen sind stetig (bzgl. χ). Denn die Stetigkeit in P folgt nach Definition der Polstelle, die in $G\backslash P$ aus der Stetigkeit holomorpher Funktionen.

3. Sind f, g meromorph in G, so sind $f \pm g,\ f \cdot g$ und im Falle $g \not\equiv 0$ auch f/g holomorph in G bis auf isolierte Punkte, und diese Punkte sind Pole oder hebbare Singularitäten. Also sind $f \pm g,\ f \cdot g,\ f/g$ zu in G meromorphen Funktionen fortsetzbar. Wir verstehen unter $f \pm g,\ f \cdot g,\ f/g$ immer die bereits fortgesetzten Funktionen.

Insbesondere sind rationale Funktionen meromorph in $\widehat{\mathbb{C}}$, d. h., sind p und q Polynome mit $q \not\equiv 0$, so kann die durch $f(z) = p(z)/q(z)$ definierte Funktion $f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon q(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ zu einer meromorphen Funktion $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden. Sind p und q teilerfremd, so heißt $\operatorname{grad}(f) = \max\{\operatorname{grad}(p), \operatorname{grad}(q)\}$ Grad von f.

Definition 2.4. Eine rationale Funktion vom Grad 1 heißt *Möbiustransformation.*

Ist f Möbiustransformation, so existieren $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

falls $z \neq \infty$ und $f(z) \neq \infty$. Wegen $\operatorname{grad}(f) = 1$ gilt $ad - bc \neq 0$. Es ist leicht zu sehen, dass Möbiustransformationen bijektive Abbildungen von $\widehat{\mathbb{C}}$ nach $\widehat{\mathbb{C}}$ sind. Hat f obige Form, so ist die Umkehrabbildung durch

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

gegeben.

Satz 2.3. *Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet, $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$, $f \not\equiv \infty$. Dann ist f genau dann meromorph in G, wenn jeder Punkt in G eine Umgebung U besitzt, in der f oder $1/f$ holomorph ist.*

Beweis. Dass f meromorph ist, wenn jeder Punkt eine entsprechende Umgebung U besitzt, ist klar mit obiger Bemerkung.

Sei jetzt f meromorph. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass jeder Punkt eine Umgebung U besitzt, so dass $\chi(f(z), f(w)) < 2$ für $z, w \in U$. Wegen $\chi(0, \infty) = 2$ gilt also $f(z) \neq 0$ oder $f(z) \neq \infty$ für alle $z \in U$. Im zweiten Fall ist f holomorph, im ersten $1/f$. □

Mit Satz 2.3 übertragen sich viele Eigenschaften holomorpher Funktionen auf meromorphe Funktionen, etwa der folgende Satz.

Satz 2.4 (Weierstraß)**.** *Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet und sei (f_n) eine Folge in G meromorpher Funktionen. Es gelte $f_n \to f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ lokal gleichmäßig bzgl. χ. Dann ist f meromorph oder $f \equiv \infty$. Ist $f \not\equiv \infty$, so gilt für $k \in \mathbb{N}$ auch*

$$f_n^{(k)} \to f^{(k)}.$$

Der Beweis für holomorphe f_n (siehe Analysis IV für Details) beruht auf der Cauchy-Integralformel:

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

für $z \in D(z_0, r)$, wobei $\overline{D(z_0, r)} \subset G$.

Satz 2.5 (Hurwitz)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, (f_n) eine Folge in G holomorpher Funktionen, und es gelte $f_n \to f\colon G \to \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig. Sei $z_0 \in G$, $r > 0$, $\overline{D(z_0, r)} \subset G$ und $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial D(z_0, r)$, insbesondere also $f \not\equiv 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq N$ die Funktionen f_n und f gleich viele Nullstellen in $D(z_0, r)$ haben, gezählt gemäß Vielfachheit.*

Beweis. Nach Residuensatz oder Argumentprinzip (siehe Analysis IV) ist durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

die Anzahl der Nullstellen von f in $D(z_0,r)$ gegeben. Die Behauptung folgt hieraus mit dem Satz von Weierstraß. □

Folgerung. Seien G, f_n, f wie oben, $f_n \to f$.

(i) Gilt $f_n(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ oder $f \equiv 0$.
(ii) Sind alle f_n injektiv, so ist f injektiv oder konstant.

Satz 2.6. *Sei $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist f rational, d.h., es gibt Polynome g,h mit $f = g/h$.*

Beweis. Sei $P = f^{-1}(\infty)$ die Menge der Pole von f. Da P diskret und $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, ist P endlich. Sei $P \cap \mathbb{C} = \{a_1, ..., a_m\}$. Sei m_j die Vielfachheit des Poles a_j und sei

$$h(z) = \prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{m_j} \quad \text{und} \quad g(z) = f(z)h(z).$$

(Genauer sind g und h die meromorphen Fortsetzungen dieser Ausdrücke auf $\widehat{\mathbb{C}}$.) Dann ist g holomorph in $\mathbb{C}$ und meromorph in $\widehat{\mathbb{C}}$. Zu zeigen ist, dass g Polynom ist. Dies folgt etwa durch Betrachten der Potenzreihe $g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j$, die in ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Da ∞ keine wesentliche Singularität ist, sind nur endlich viele c_j von 0 verschieden. □

Der folgende Satz ist aus Analysis IV bekannt.

Satz 2.7. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $f\colon G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph. Dann existiert eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{g(z)}$ für $z \in G$. Darüberhinaus existiert zu $m \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h\colon G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = h(z)^m$ für $z \in G$.*

Beweis. Die Funktion $\ell : G \to \mathbb{C}$, $\ell(z) = f'(z)/f(z)$, ist holomorph. Da nach dem Cauchyschen Integralsatz das Integral von ℓ über geschlossene (stückweise glatte) Kurven in G verschwindet, hängt das Integral von ℓ über eine nicht geschlossene Kurve in G nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Für festes $z_0 \in G$ kann also eine Funktion $L : G \to \mathbb{C}$ durch $L(z) = \int_{z_0}^{z} \ell(\zeta)d\zeta$ definiert werden, wobei das Integral über eine beliebige (stückweise glatte) Kurve von z_0 nach z geht. Sei nun $c \in \mathbb{C}$ mit $e^c = f(z_0)$ und $g : G \to \mathbb{C}$, $g(z) = L(z) + c$. Mit $g'(z) = L'(z) = \ell(z)$ folgt

$$\frac{d}{dz}f(z)e^{-g(z)} = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)\ell(z)e^{-g(z)} = 0,$$

wegen $e^{g(z_0)} = e^c = f(z_0)$ also $f(z)e^{-g(z)} = 1$ und damit $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in G$.

Die zweite Behauptung folgt mit $h(z) = e^{g(z)/m}$. □

3. Normale Familien

Ein zentrales Konzept in der Iterationstheorie ist der Begriff der „Normalität“.

Definition 3.1. Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen und sei $\mathcal{F}$ eine Menge (oder Familie) von Funktionen von G nach $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann heißt $\mathcal{F}$ *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Für $z_0 \in G$ heißt $\mathcal{F}$ normal in z_0, falls z_0 eine Umgebung $U \subset G$ besitzt, so dass $\{f|_U\colon f \in \mathcal{F}\}$ normal ist.

Bemerkung. Sei $\mathcal{F}$ normal. Für jede Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ existiert also eine Teilfolge (f_{n_k}), so dass $f_{n_k} \to f$ lokal gleichmäßig für ein $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$. Man beachte, dass *nicht* verlangt wird, dass $f \in \mathcal{F}$ gilt. Fordert man auch dies, so erhält man den Begriff der (Folgen-)Kompaktheit (in dem mit einer geeigneten Metrik versehenen Raum der Funktionen von G nach $\widehat{\mathbb{C}}$).

In unseren Anwendungen werden die f_k immer alle meromorph (bzw. holomorph) sein. Nach dem Satz von Weierstraß ist dann auch f meromorph (bzw. holomorph) oder $f \equiv \infty$. Sind alle f_k stetig, so ist auch f stetig.

Definition 3.2. Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen und sei $\mathcal{F}$ eine Menge (oder Familie) von Funktionen von G nach $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann heißt $\mathcal{F}$ *gleichgradig stetig* (engl.: equicontinuous) *in* $z_0 \in G$, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{F} \quad \forall\, z \in G:\ \chi(z, z_0) < \delta \Rightarrow \chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$$

$\mathcal{F}$ heißt *gleichgradig stetig auf* $E \subset G$, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{F} \quad \forall\, z_0 \in E \quad \forall\, z \in G:\ \chi(z, z_0) < \delta \Rightarrow \chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$$

Bemerkung. Entscheidend ist in obiger Definition, dass δ *nicht* von f abhängt.

Wir erinnern an den Begriff der *gleichmäßigen* Stetigkeit: Eine Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt gleichmäßig stetig in G, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z, z_0 \in G\colon\ \chi(z, z_0) < \delta \Rightarrow \chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon$$

Hier hängt δ *nicht* von z_0 ab. Es gilt nun nach Sätzen aus Analysis I/II: Ist f stetig in E und E kompakt, so ist f gleichmäßig stetig in E. Analog gilt hier:

Hilfssatz 3.1. *Seien G und $\mathcal{F}$ wie in Definition 3.2. Sei $E \subset G$ kompakt. Falls $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in jedem Punkt von E ist, so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf E.*

Beweis. Falls $\mathcal{F}$ nicht gleichgradig stetig auf E ist, so existieren $z_k \in E, z_k' \in G$ und $f_k \in \mathcal{F}$ sowie $\varepsilon > 0$ mit $\chi(z_k, z_k') \to 0$ und $\chi(f_k(z_k),\ f_k(z_k')) \geq \varepsilon$. Da E kompakt ist, enthält (z_k) eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte bereits, dass $z_k \to z_0 \in E$. Es folgt, dass $z_k' \to z_0$. Da $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in z_0 ist, existiert $\delta > 0$ mit $\chi(f(z), f(z_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $\chi(z, z_0) < \delta$ und $f \in \mathcal{F}$. Für genügend große k ist nun $\chi(z_k, z_0) < \delta$ und $\chi(z_k', z_0) < \delta$ und daher

$$\varepsilon \leq \chi(f_k(z_k), f_k(z_k')) \leq \chi(f_k(z_k), f_k(z_0)) + \chi_k(f_k(z_0), f_k(z_k')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was ein Widerspruch ist. □

Satz 3.1 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen und $\mathcal{F}$ eine Menge stetiger Funktionen von G nach $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann normal, wenn $\mathcal{F}$ in jedem Punkt von G gleichgradig stetig ist.*

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{F}$ normal. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ in einem Punkt $z_0 \in G$ nicht gleichgradig stetig ist. Dann existieren $\varepsilon > 0,\ z_k \in G,\ f_k \in \mathcal{F}$ mit $z_k \to z_0$, aber $\chi(f_k(z_k), f_k(z_0)) \geq \varepsilon$. Nach Voraussetzung hat (f_k) eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $f_k \to f\colon G \to \mathbb{C}$. Damit existieren $k_1 \in \mathbb{N}$ und $\delta_1 > 0$ mit $\chi(f_k(z), f(z)) < \varepsilon/3$ für $k \geq k_1$ und $\chi(z, z_0) < \delta_1$.

Weiter ist f stetig (in z_0). Damit existiert $\delta_2 > 0$ mit $\chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon/3$ für $\chi(z, z_0) < \delta_2$. Schließlich existiert $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $\chi(z_k, z_0) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ für $k \geq k_2$.

Für $k \geq \max\{k_1, k_2\}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \chi(f_k(z_k), f_k(z_0)) \\ &\leq \chi(f_k(z_k), f(z_k)) + \chi(f(z_k), f(z_0)) + \chi(f(z_0), f_k(z_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

Zum Beweis der umgekehrten Richtung sei nun $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig. Wir wählen eine Folge (z_k), die dicht in G ist, das heißt, jeder Punkt von G ist Häufungswert dieser Folge. (Eine solche Folge existiert, denn zum Beispiel ist die Menge aller komplexen Zahlen (in G), die rationalen Real- und Imaginärteil haben, dicht und abzählbar.) Sei nun (f_n) Folge in $\mathcal{F}$. Da $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, existiert zunächst eine Teilfolge $(f_{n_{1,k}})$ von (f_n) so dass $(f_{n_{1,k}}(z_1))$ konvergiert. Die Folge $(f_{n_{1,k}}(z_2))$ enthält nun eine Teilfolge $(f_{n_{2,k}}(z_2))$, die konvergiert. Natürlich konvergiert auch die Folge $(f_{n_{2,k}}(z_1))$, da sie Teilfolge der konvergenten Folge $(f_{n_{1,k}}(z_1))$ ist.

Induktiv erhält man so für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Folge $(f_{n_{j,k}})_{k\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $(f_{n_{j,k}}(z_i))_{k\in\mathbb{N}}$ für $1 \leq i \leq j$ konvergiert und $(f_{n_{j+1,k}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_{n_{j,k}})_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Wir betrachten jetzt die Folge (g_k) mit $g_k = f_{n_{k,k}}$. (Dies ist die sogenannte *Diagonalfolge.*) Es folgt, dass $(g_k(z_j))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ konvergiert.

Wir zeigen jetzt, dass (g_k) nicht nur auf der dichten Teilmenge $\{z_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ konvergiert, sondern auf ganz G und zwar lokal gleichmäßig. (Nur dafür brauchen wir die gleichgradige Stetigkeit.)

Sei also $z_0 \in G$. Dann existiert $\eta > 0$ mit $E := \{z \colon \chi(z, z_0) \leq \eta\} \subset G$. Die Menge E ist kompakt und nach Hilfssatz 2.1 ist damit $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf E.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $\chi(f(z), f(\zeta)) < \varepsilon/3$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z, \zeta \in E$ mit $\chi(z, \eta) < \delta$. Weiter existieren $j_1, \dots j_N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in E$ ein $k = k(z) \in \{1, \dots, N\}$ existiert mit $\chi(z, z_{j_k}) < \delta$. (Dies folgt zum Beispiel, da E kompakt und $\left\{\{\widehat{D}(z_j, \delta)\}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ offene Überdeckung von E ist. Diese hat eine endliche Teilüberdeckung.) Für $k \in \{1, \dots, N\}$ existiert nun n_k mit $\chi(g_n(z_{j_k}), g_m(z_{j_k})) < \varepsilon/3$ für $m, n \geq n_k$. Für $m, n \geq n_0 := \max\{n_k \colon 1 \leq k \leq N\}$ und $z \in E$ folgt damit

$$\begin{aligned}\chi(g_n(z), g_m(z)) &\leq \chi(g_n(z), g_n(z_{j_{k(z)}})) + \chi(g_n(z_{j_{k(z)}}), g_m(z_{j_{k(z)}})) + \chi(g_m(z_{j_{k(z)}}), g_m(z)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist (g_n) Cauchy-Folge (sogar „gleichmäßige“ Cauchy-Folge auf E). Es folgt, dass $(g_n(z))$ für $z \in E$ konvergiert. Auf E konvergiert die Folge (g_n) sogar gleichmäßig. □

Bemerkung. 1. Die Begriffe „normal“ und „gleichgradig stetig“ sind auch für Mengen (oder Familien) von Funktionen zwischen beliebigen metrischen Räumen sinnvoll. Der Satz von Arzelà-Ascoli muss insbesondere dann modifiziert werden, wenn der Zielraum nicht kompakt ist; man vgl. z. B. die Bücher von Ahlfors oder Conway.

2. Aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt als Nebenergebnis auch, dass eine Menge in G stetige Funktionen ($G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen) genau dann normal ist, wenn sie in jedem Punkt des Gebiets von G normal ist. Das sieht man aber (mit ähnlichem „Diagonalverfahren“ wie oben) auch leicht direkt ein.

Definition 3.3. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann heißt

$$f^\sharp(z) := \lim_{\zeta\to z} \frac{\chi(f(\zeta), f(z))}{|\zeta - z|}$$

die *sphärische Ableitung* von f (in z).

Bemerkung. 1. Der Grenzwert existiert, denn für $f(z) \neq \infty$ gilt

$$f^\sharp(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

Für $f(z) = \infty$ folgt die Existenz wegen $\chi(a,b) = \chi\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ für $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$, mit $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$. Dies liefert auch

$$f^\sharp = \left(\frac{1}{f}\right)^\sharp.$$

Außerdem folgt aus der Darstellung von $f^\sharp$, dass $f^\sharp$ stetig ist.

2. Es wäre vielleicht systematischer, statt $f^\sharp$

$$f^*(z) = \lim_{\zeta \to z} \frac{\chi(f(\zeta), f(z))}{\chi(\zeta, z)}$$

zu betrachten; dies ist aber unüblich. Für $z \neq \infty$ ist $f^*(z) = \frac{1}{2} f^\sharp(z)(1 + |z|^2)$.

Wir erinnern an die Definition der Länge einer Kurve: Ist $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ Kurve, so ist die Länge $\ell(\gamma)$ durch

$$\ell(\gamma) = \sup_{\substack{t_0, t_1, \ldots, t_n \text{ mit} \\ a = t_0 < \ldots < t_n = b}} \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \int_\gamma |dz|$$

gegeben. Für differenzierbares γ gilt

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Analog definiert man die *sphärische Länge* $\widehat{\ell}(\gamma)$ einer Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \widehat{\mathbb{C}}$ durch

$$\widehat{\ell}(\gamma) = \sup_{\substack{t_0, t_1, \ldots, t_n \text{ mit} \\ a = t_0 < \ldots < t_n = b}} \sum_{j=1}^{n} \chi(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1}))$$

Der *sphärische Abstand* $\sigma(z, w)$ zweier Punkte $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ ist definiert durch $\inf_\gamma \widehat{\ell}(\gamma)$, wobei das Infimum über alle Kurven γ mit Anfangspunkt z und Endpunkt w zu nehmen ist. Man sieht leicht, dass σ eine Metrik auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist, die sogenannte *sphärische Metrik*, und dass

$$\chi(z, w) \leq \sigma(z, w) \leq \frac{\pi}{2} \chi(z, w)$$

gilt. Die Metriken χ und σ sind also äquivalent. Wir werden im Folgenden in der Regel die chordale Metrik benutzen.

Sei nun $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Ist f holomorph in $\operatorname{spur}(\gamma) := \gamma([a,b])$, so folgt mit der Kettenregel, dass

$$\ell(f \circ \gamma) = \int_\gamma |f'(z)|\, |dz|.$$

Für die sphärische Länge ergibt eine heuristische Überlegung, dass

$$\begin{aligned}
\widehat{\ell}(f \circ \gamma) &= \sup \sum_{j=1}^{n} \chi(f(\gamma(t_j)), f(\gamma(t_{j-1}))) \\
&= \sup \sum_{j=1}^{n} \frac{\chi(f(\gamma(t_j)), f(\gamma(t_{j-1})))}{|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\
&\approx \sup \sum_{j=1}^{n} f^\sharp(\gamma(t_j)) |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \\
&= \int_\gamma f^\sharp(z) |dz|.
\end{aligned}$$

Diese Überlegung kann präzisiert werden, das heißt, es gilt

$$\widehat{\ell}(f \circ \gamma) = \int_\gamma f^\sharp(z)|dz| \leq \ell(\gamma) \sup_{\zeta \in \text{spur}(\gamma)} f^\sharp(\zeta).$$

Wählt man γ als gerade Verbindungsstrecke von z_0 und z, so folgt

$$\chi(f(z), f(z_0)) \leq \sigma(f(z), f(z_0)) \leq \widehat{\ell}(f \circ \gamma) \leq |z - z_0| \sup_{\zeta \in [z_0, z]} f^\sharp(\zeta).$$

Gilt $f^\sharp(\zeta) \leq M$ für $\zeta \in D(z_0, r)$, so folgt für $z \in D(z_0, r)$ also

$$\chi(f(z), f(z_0)) \leq M|z - z_0|$$

und damit

$$\chi(f(z), f(z_0)) < \varepsilon \quad \text{für} \quad |z - z_0| < \delta := \min\left\{r, \frac{\varepsilon}{M}\right\}.$$

Die Menge aller f mit $f^\sharp(\zeta) \leq M$ für $\zeta \in D(z_0, r)$ ist also gleichgradig stetig in z_0.

Zusammen mit dem Satz von Arzelà-Ascoli erhalten wir eine Richtung des folgenden Satzes.

Satz 3.2 (Marty). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F}$ eine Menge (oder Familie) in G meromorpher Funktionen. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann normal, wenn $\{f^\sharp \colon f \in \mathcal{F}\}$ lokal beschränkt ist, d.h., wenn zu $z_0 \in G$ ein $r > 0$ und $M > 0$ existieren mit $f^\sharp(z) \leq M$ für $f \in \mathcal{F}$ und $|z - z_0| < r$.*

Beweis. Dass aus der lokalen Beschränktheit der sphärischen Ableitungen die gleichgradige Stetigkeit und damit die Normalität folgt, wurde oben gezeigt.

Sei umgekehrt jetzt $\mathcal{F}$ normal, aber $\{f^\sharp \colon f \in \mathcal{F}\}$ nicht lokal beschränkt. Dann existieren $z_0 \in G$ und Folgen (z_n) in G und (f_n) in $\mathcal{F}$ mit $z_n \to z_0$ und $f_n^\sharp(z_n) \to \infty$. Wegen der Normalität hat (f_n) eine konvergente Teilfolge, ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $f_n \to f$. Falls $f \not\equiv \infty$, folgt $f_n^\sharp \to f^\sharp$ und damit $f^\sharp(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n^\sharp(z_n) = \infty$, was ein Widerspruch ist.

Gilt aber $f \equiv \infty$, so folgt $1/f_n \to 0$ und damit $f_n^\sharp = (1/f_n)^\sharp \to 0$, und man erhält ebenfalls einen Widerspruch. ☐

Beispiel. Sei $D = \mathbb{C}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon D \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = nz$. Wir betrachten die Familie $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt $f_n(z) \to \infty$ lokal gleichmäßig für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $f_n(0) = 0$. Es folgt, dass $\mathcal{F}$ nicht normal in 0, aber normal in jedem Punkt von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist.

Zur Illustration des Satzes von Arzelà-Ascoli berechnet man für $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ den chordalen Abstand

$$\chi(f_n(z), f_n(z_0)) = \frac{2n|z - z_0|}{\sqrt{1 + n^2|z|^2}\sqrt{1 + n^2|z_0|^2}}$$

Ist $z_0 \neq 0$, so folgt

$$\chi(f_n(z), f_n(z_0)) \leq \frac{2n|z - z_0|}{\sqrt{n^2|z_0|^2}} = \frac{2}{|z_0|}|z - z_0|$$

und damit die gleichgradige Stetigkeit in z_0. Ist $z_0 = 0$, so folgt

$$\chi(f_n(z), f_n(z_0)) = \frac{2n|z|}{\sqrt{1 + n^2|z|^2}}.$$

Beispielsweise ist also

$$\chi\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right), f_n(0)\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

womit $\mathcal{F}$ nicht gleichgradig stetig in 0 ist.

Zur Illustration des Marty-Kriteriums berechnen wir die sphärische Ableitung

$$f_n^\sharp(z) = \frac{2n}{1 + n^2|z|^2}.$$

Es ist einfach zu zeigen, dass die Funktion

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2|z|^2}$$

für $|z| \neq 0$ ihr Maximum in $x = 1/|z|$ annimmt. Es folgt

$$f_n^\sharp(z) \leq \frac{1}{|z|}$$

für $|z| \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Andererseits gilt $f_n^\sharp(0) \to \infty$ für $n \to \infty$. Wiederum ergibt sich, dass $\mathcal{F}$ normal in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ und nicht normal in 0 ist.

Satz 3.3 (Zalcman 1975)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F}$ eine Menge (oder Familie) in G meromorpher Funktionen. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann nicht normal, wenn Folgendes gilt:*

Es existiert eine Folge (z_n) in G und ein Punkt $z_0 \in G$ mit $z_n \to z_0$, eine Folge (ϱ_n) von positiven reellen Zahlen mit $\varrho_n \to 0$, eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ und eine nicht konstante meromorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ so dass $f_n(z_n + \varrho_n z) \to f(z)$ für $n \to \infty$, lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$. Dabei kann f so gewählt werden, dass $f^\sharp(z) \leq 1 = f^\sharp(0)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $\mathcal{F}$ nicht normal ist. Dann existiert nach dem Satz von Marty eine Folge (ζ_n) in G und eine Folge (f_n) in $\mathcal{F}$ mit $\zeta_n \to \zeta_0 \in G$ und $f_n^\sharp(\zeta_n) \to \infty$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\overline{D(0,1)} \subset G$ und $\zeta_0 = 0$. (Sonst betrachte man $f(\zeta_0 + rz)$ statt $f(z)$ für $f \in \mathcal{F}$, mit einem geeigneten $r > 0$.)

Nun existiert $z_n \in D(0,1)$ mit $M_n := \max_{z \in D(0,1)} f_n^\sharp(z)(1-|z|) = f_n^\sharp(z_n)(1-|z_n|)$. Es folgt

$$M_n \geq f_n^\sharp(\zeta_n)(1-|\zeta_n|),$$

also $M_n \to \infty$. Wir setzen nun

$$\varrho_n := \frac{1}{f_n^\sharp(z_n)} = \frac{1-|z_n|}{M_n}.$$

Dann gilt $\varrho_n \to 0$.

Für $|z| < M_n = (1-|z_n|)/\varrho_n$ gilt nun

$$|z_n + \varrho_n z| < |z_n| + \varrho_n M_n = 1$$

und damit ist durch $g_n(z) = f_n(z_n + \varrho_n z)$ eine meromorphe Funktion $g_n\colon D(0, M_n) \to \widehat{\mathbb{C}}$ definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} g_n^\sharp(z) &= \varrho_n f_n^\sharp(z_n + \varrho_n z) \\ &\leq \varrho_n \frac{M_n}{1-|z_n+\varrho_n z|} \\ &\leq \frac{1-|z_n|}{1-|z_n|-\varrho_n|z|} \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{\varrho_n|z|}{1-|z_n|}} \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{|z|}{M_n}} \end{aligned}$$

Damit enthält (nach dem Marty-Kriterium) die Folge (g_n) eine Teilfolge, die in $D(0,M_1)$ konvergiert. Diese wiederum enthält eine Teilfolge, die in $D(0,M_2)$ konvergiert, usw. Die „Diagonalfolge“ konvergiert dann in

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} D(0,M_n) = \mathbb{C}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei bereits (g_n) konvergent gegen $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ und außerdem auch (z_n) konvergent gegen $z_0 \in \overline{D(0,1)} \subset G$. Wegen $g_n^\sharp(0) = \varrho_n f_n^\sharp(z_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f^\sharp(0) = 1$ und damit f nicht konstant (auch nicht konstant gleich ∞). Außerdem folgt aus $g_n^\sharp(z) \leq 1/(1-|z|/M_n)$ auch $f^\sharp(z) \leq 1$ für $z \in \mathbb{C}$.

Zum Beweis der umgekehrten Richtung seien (z_n), (ϱ_n), (f_n), z_0 und f wie angegeben. Da f nicht konstant, existiert $z' \in \mathbb{C}$ mit $f^\sharp(z') \neq 0$. Wegen $f(z_n+\varrho_n z) \to f(z)$ folgt $\varrho_n f_n^\sharp(z_n+\varrho_n z) \to f^\sharp(z)$. Insbesondere für $z'_n = z_n + \varrho_n z'$ erhält man $\varrho_n f_n^\sharp(z'_n) \to f^\sharp(z')$, also $f_n^\sharp(z'_n) \to \infty$. Wegen $z'_n \to z_0$ folgt nun nach dem Marty-Kriterium, dass $\mathcal{F}$ nicht normal in z_0 ist. $\square$

Bemerkung. 1. Die Idee bei der Konstruktion der Folge (z_n) ist, z_n als Maximalstelle von $f_n^\sharp$ zu wählen. Da $f_n^\sharp$ aber keine lokalen Maxima haben muss, betrachtet man stattdessen $f^\sharp \cdot \varphi$ mit φ geeignet, z.B. $\varphi(z) = 1 - |z|$.

2. Der Beweis zeigt, dass die Existenz der Folgen (z_n), (ρ_n) und (f_n) mit $z_n \to z_0$ die Nichtnormalität von $\mathcal{F}$ *im Punkte* z_0 liefert. Umgekehrt kann man zeigen, dass man bei Nichtnormalität in z_0 die Folge (z_n) so wählen kann, dass $z_n \to z_0$ gilt. Das sieht man beispielsweise ein, indem man ein weiteres Mal „diagonalisiert“.

Beispiele. 1. Wir betrachten wieder die Familie $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = nz$. Mit $z_n = 0$ und $\varrho_n = 1/n$ folgt $f(z_n + \varrho_n z) = z \to z$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad f_n(z) = z^n$. Weiter sei $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt dann $f_n(z) \to 0$ falls $|z| < 1$ und $f_n(z) \to \infty$ falls $|z| > 1$. Damit folgt, dass $\mathcal{F}$ normal in $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \neq 1\}$ ist und dass $\mathcal{F}$ nicht normal in $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ ist.

Für $z_0 = 1 = z_n$, $\varrho_n = 1/n$, gilt etwa

$$f_n(z_n + \varrho_n z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^z$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$.

Instruktiv ist auch das Marty-Kriterium. Es gilt

$$f_n^\sharp(z) = \frac{2n|z|^{n-1}}{1+|z|^{2n}} \to \begin{cases} 0 & \text{für } |z| \neq 1, \\ \infty & \text{für } |z| = 1. \end{cases}$$

Wir betrachten jetzt einige Anwendungen des Zalcmanschen Lemmas.

Satz 3.4. *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in einer offenen Menge G holomorphen Funktionen. Es gebe ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in G$ und $f \in \mathcal{F}$. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ nicht normal ist. Seien (f_n), (ϱ_n), (z_n), z_0 und f wie im Zalcman-Lemma, also $f_n(z_n + \varrho_n z) \to f(z)$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$. Es folgt $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Andererseits ist f nicht konstant. Das ist ein Widerspruch zum Satz von Liouville. $\square$

Bemerkung. Satz 3.4 folgt auch leicht aus dem Satz von Arzelà-Ascoli oder auch dem Satz von Marty.

Der folgende Satz ist eine wesentliche Verschärfung von Satz 3.4.

Satz 3.5 (Montel). *Seien $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen, $a_1, a_2, a_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ verschieden und $\mathcal{F}$ eine Familie in G meromorpher Funktionen. Für alle $z \in G$, $f \in \mathcal{F}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$ gelte $f(z) \neq a_j$. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Ein verwandter Satz ist der folgende.

Satz 3.6 (Picard). *Seien $a_1, a_2, a_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ verschieden und sei $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $j \in \{1, 2, 3\}$ gelte $f(z) \neq a_j$. Dann ist f konstant.*

Satz 3.6 heißt auch „Kleiner Satz von Picard"; vgl. den später als Satz 3.7 folgenden „Großen Satz von Picard".

Satz 3.6 ist eine einfache Folgerung aus Satz 3.5: Denn ist f wie in Satz 3.6, dann hat für $n \in \mathbb{N}$ die durch $f_n(z) = f(nz)$ definierte Funktion $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die gleichen Eigenschaften, d.h. $f_n(z) \neq a_j$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$. Nach Satz 3.5 ist $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ normal. Hieraus folgt aber, dass f konstant ist. (Denn ist z.B. $f(z_0) \neq f(0)$, so kann wegen $f_n(z_0/n) = f(z_0)$ und $f_n(0) = f(0)$ die Folge (f_n) keine konvergente Teilfolge haben.)

Umgekehrt folgt aber auch Satz 3.5 aus Satz 3.6 mit Hilfe des Zalcman-Lemmas. Denn sei $\mathcal{F}$ wie in Satz 3.5 nicht normal, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $G \subset \mathbb{C}$ gilt. Seien f_n, ϱ_n, z_n und f wie im Zalcman-Lemma, also $f_n(z_n + \varrho_n z) \to f(z)$ lokal gleichmäßig. Nach Satz von Hurwitz gilt dann $f(z) \neq a_j$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$. Das ist ein Widerspruch.

Beweis von Satz 3.6 (und Satz 3.5). Sei f wie in Satz 3.6, aber nicht konstant. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$, denn sonst kann man $M \circ f$ mit einer geeigneten Möbiustransformation betrachten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei außerdem $f'(0) \neq 0$, denn sonst kann man $f(z)$ durch $f(z + c)$ mit einem geeigneten $c \in \mathbb{C}$ ersetzen.

Wegen $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert nach Satz 2.7 für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine ganze Funktion g mit $g(z)^m = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere existiert zu $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Funktion f_n mit

$$f_n(z)^{2^n} = f(3^n z).$$

Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F} := \{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ nicht normal in 0 ist. Wegen $f_n(0)^{2^n} = f(0) \neq 0$ folgt zunächst, dass $|f_n(0)| = \sqrt[2^n]{|f(0)|} \to 1$. Weiter gilt

$$3^n f'(3^n z) = 2^n f_n(z)^{2^n - 1} f_n'(z) = 2^n f_n(z)^{2^n} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = 2^n f(3^n z) \frac{f_n'(z)}{f_n(z)},$$

also

$$|f_n'(0)| = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left|\frac{f'(0)}{f(0)}\right| |f_n(0)|$$

Wegen $|f_n(0)| \to 1$ gilt also $f_n^\sharp(0) \to \infty$. Mit dem Marty-Kriterium folgt, dass $\mathcal{F}$ nicht normal ist.

Damit ist das Zalcman-Lemma auf $\mathcal{F}$ anwendbar. Es existieren also $z_k \in \mathbb{C}$, $n_k \in \mathbb{N}$, $\varrho_k > 0$ und g ganz und nicht konstant mit

$$g_k(z) := f_{n_k}(z_k + \varrho_k z) \to g(z)$$

lokal gleichmäßig für $z \in \mathbb{C}$.

Wegen $f(z) \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt $f_{n_k}(z)^{2^{n_k}} \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und damit $g_k(z) \neq e^{2\pi i j/2^{n_k}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n_k} - 1\}$. Nach dem Satz von Hurwitz folgt

$$g(z) \neq e^{2\pi i j/2^n} \text{ für } z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \text{ und } j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}.$$

Da g als holomorphe Funktion auch offen ist, folgt $|g(z)| \neq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit gilt entweder $|g(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ oder $|g(z)| > 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Im ersten Fall ist g konstant und im zweiten Fall ist $1/g$ konstant. In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch zum Satz von Liouville. □

Eine Verallgemeinerung des „kleinen" Picardschen Satzes 3.6 ist das folgende Ergebnis.

Satz 3.7 (Großer Picardscher Satz). *Seien $a_1, a_2, a_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ verschieden und sei $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Umgebung von $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Sei f meromorph in $U\backslash\{z_0\}$, also z_0 isolierte Singularität von f. Gilt $f(z) \neq a_j$ für alle $z \in U\backslash\{z_0\}$ und alle $j \in \{1,2,3\}$, so ist z_0 keine wesentliche Singularität.*

Bemerkung. Der kleine Picardsche Satz folgt aus dem großen: Denn sei $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ meromorph. Mit $U = \widehat{\mathbb{C}}$ und $z_0 = \infty$ folgt aus dem großen Picardschen Satz, dass ∞ hebbare Singularität oder Pol ist, also f meromorph (fortsetzbar) auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist. Damit ist f rational. Wegen $f(z) \neq a_j$ für alle z und j folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, dass f konstant ist.

Beweis des großen Picardschen Satzes. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$ und $a_3 = \infty$, also f holomorph in $D(0,r)\backslash\{0\}$ für ein $r > 0$. Sei $z_0 = 0$ wesentliche Singularität. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß existiert eine Folge (z_n) in $D(0,r)\backslash\{0\}$ mit $z_n \to 0$ und $f(z_n) \to 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|z_n| < r/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n\colon \left\{z \in \mathbb{C}\colon \tfrac{1}{2} < |z| < 2\right\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z_n z).$$

Wegen $f_n(z) \neq a_1, a_2, \infty$ für alle n und z folgt nach dem Satz von Montel, dass $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ normal ist. Damit existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $g\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{2} < |z| < 2\} \to \mathbb{C}$ mit $f_{n_k} \to g$ lokal gleichmäßig. Wegen $f_{n_k}(1) = f(z_{n_k}) \to 0$ folgt $g(1) = 0$, insbesondere also $g \not\equiv \infty$. Damit existiert $M > 0$ mit $|f_{n_k}(z)| \leq M$ für $|z| = 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\max_{|z|=|z_{n_k}|} |f(z)| \leq M.$$

Nach Maximumprinzip folgt für $|z_{n_j}| < |z_{n_k}|$, dass

$$\max_{|z_{n_j}|\leq|z|\leq|z_{n_k}|} |f(z)| \leq M.$$

Dies liefert $|f(z)| \leq M$ für $0 < |z| \leq |z_{n_1}|$. Nach Riemannschem Hebbarkeitssatz ist damit 0 hebbare Singularität. Das ist ein Widerspruch. □

Eine schöne Anwendung der Theorie normaler Familien ist folgendes Ergebnis. Wir benutzen hier und im Folgenden die Notation $\mathbb{D} := \{z\colon |z| < 1\}$.

Satz 3.8 (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $G \neq \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in G$. Dann existiert genau eine biholomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{D} \to G$ mit $f(0) = z_0$ und $f'(0) > 0$.*

Für den Beweis der Eindeutigkeit benötigen wir folgendes Resultat.

Satz 3.9 (Schwarzsches Lemma). *Sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{D}$. Gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z)| = |z|$ für ein $z \in \mathbb{D}$, so existiert $a \in \partial\mathbb{D}$ mit $f(z) = az$ für alle $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Dann ist g holomorph in $\mathbb{D}$ und für $0 < r < 1$ gilt
$$\max_{|z|=r} |g(z)| = \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$
Es folgt mit dem Maximumprinzip, dass $\max_{|z|\leq r} |g(z)| \leq 1/r$ für $0 < r < 1$. Mit $r \to 1$ folgt
$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| \leq 1,$$
also $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Gilt hier Gleichheit, so ist g nach Maximumprinzip konstant, und wegen $|g(z)| = 1$ für $z \in \mathbb{D}$ auch $g(z) \equiv a$ für ein a mit $|a| = 1$. □

Beweis von Satz 3.8. Zur Eindeutigkeit: Seien f, g Funktionen mit den geforderten Eigenschaften und sei $T := g^{-1} \circ f$. Dann ist $T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph, $T(0) = 0$ und
$$T'(0) = (g^{-1})'(z_0)f'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)} > 0.$$
Nach dem Schwarzschem Lemma ist
$$T'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)} \leq 1.$$
Analog ist $T^{-1} = f^{-1} \circ g$ biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ und damit
$$0 < (T^{-1})'(0) = \frac{g'(0)}{f'(0)} \leq 1.$$
Es folgt $T'(0) = 1$, und damit $T(z) = az$ für ein $a \in \partial\mathbb{D}$. Es ist $a = T'(0) = 1$, also $T(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$, d.h., $f = g$.

Zur Existenz: Wir werden die Existenz von einer biholomorphen Funktion $h : G \to \mathbb{D}$ mit $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) > 0$ nachweisen. Dann leistet $f := h^{-1}$ das Verlangte.

Die Idee ist wie folgt: Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller holomorphen und injektiven Funktionen $g : G \to \mathbb{D}$, für die $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) > 0$ gilt. Wir werden zeigen:

(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
(ii) $\mathcal{F}$ ist normal;
(iii) es existiert $h \in \mathcal{F}$ mit $h'(z_0) = \max\{g'(z_0) : g \in \mathcal{F}\}$;
(iv) die Funktion h aus (iii) ist biholomorph.

Zu (i): Wegen $G \neq \mathbb{C}$ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \notin G$ annehmen. Da G einfach zusammenhängend ist, existiert nach Satz 2.7 ein holomorpher Zweig φ des Logarithmus in G, das heißt, es existiert eine holomorphe Funktion $\varphi : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{\varphi(z)} = z$ für alle $z \in G$.

Sei $w_0 = \varphi(z_0)$. Da $\varphi(G)$ offen ist, existiert $r > 0$ mit $D(w_0, r) \subset \varphi(G)$. Dies impliziert, dass $D(w_0 + 2\pi i, r) \cap \varphi(G) = \emptyset$. Denn sei $w_1 \in D(w_0 + 2\pi i, r) \cap \varphi(G)$ und $w_2 := w_1 - 2\pi i \in D(w_0, r) \subset \varphi(G)$. Dann existiert $z_1, z_2 \in G$ mit $\varphi(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2$. Es folgt, dass $z_1 = e^{\varphi(z_1)} = e^{w_1} = e^{w_2} = e^{\varphi(z_2)} = z_2$, was ein Widerspruch ist.

Damit ist durch
$$z \mapsto \frac{r}{2} \frac{1}{\varphi(z) - (w_0 + 2\pi i)}$$
eine injektive, holomorphe Abbildung $F : G \to D(0, \frac{1}{2})$ gegeben. Durch
$$z \mapsto e^{i\theta}(F(z) - F(z_0))$$
ist damit für geeignetes $\theta \in \mathbb{R}$ eine Abbildung in $\mathcal{F}$ gegeben.

Zu (ii): Dies folgt aus Satz 3.4.

Zu (iii): Sei (g_n) Folge in $\mathcal{F}$ mit
$$g_n'(z_0) \to \sup\{g'(z_0) \colon g \in \mathcal{F}\}.$$
Da $\mathcal{F}$ normal ist, enthält (g_n) eine konvergente Teilfolge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $g_n \to h$. Wegen
$$h(z_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(z_0) = 0$$
ist $h(z) \not\equiv \infty$, also folgt mit dem Satz von Weierstraß, dass $g_n' \to h'$ lokal gleichmäßig. Damit gilt
$$h'(z_0) = \sup\{g'(z_0) \colon g \in \mathcal{F}\} > 0.$$
Also ist h nicht konstant. Nach dem Satz von Hurwitz ist h auch injektiv. Es folgt, dass $h \in \mathcal{F}$.

Zu (iv): Es ist zu zeigen, dass h auch surjektiv ist. Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall ist. Dann existiert $a \in \mathbb{D}$, so dass $h(z) \neq a$ für alle $z \in G$. Für $c \in \mathbb{D}$ sei
$$T_c \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ T_c(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}.$$
Mit $u := T_a \circ h$ gilt dann $u(z) \neq 0$ für $z \in G$. Damit existiert $v \colon G \to \mathbb{D}$ mit $u(z) = v(z)^2$ für $z \in G$, also $v(z) = \sqrt{u(z)}$ mit einem geeigneten Zweig der Wurzel. (Die Existenz dieser Funktion v folgt wieder mit Satz 2.7.) Wir betrachten nun $k \colon G \to \mathbb{D}$,
$$k(z) = e^{i\theta} T_b\left(v(z)\right) = e^{i\theta} T_b\left(\sqrt{T_a(h(z))}\right),$$
wobei $b := v(z_0) = \sqrt{T_a(h(z_0))}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $k'(z_0) > 0$ gilt.

Eine längere Rechnung zeigt dann, dass $k'(z_0) > h'(z_0)$ gilt. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung. Man kann die Ungleichung $k'(z_0) > h'(z_0)$ auch erhalten, ohne die Ableitung $k'(z_0)$ auszurechnen. Mit
$$S(z) = T_a^{-1}\left(T_b^{-1}(e^{-i\theta}z)^2\right)$$
gilt $h = S \circ k$ und damit $h'(z_0) = S'(k(z_0))k'(z_0) = S'(0)k'(z_0)$. Wegen $S(0) = 0$ und da S nicht von der Form $S(z) = cz$ ist, folgt $k'(z_0) > h'(z_0)$.

4. Fatou- und Juliamengen

Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet und $f \colon G \to G$ meromorph. Für $n \in \mathbb{N}$ sind dann die Iterierten f^n meromorph. Wir wollen die Familie $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ untersuchen, insbesondere auf Normalität.

Satz 4.1. *Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet, $f \colon G \to G$ meromorph. Es sei $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ normal. Dann gilt genau einer der folgenden drei Fälle:*

(i) *Es existiert $a \in G$ mit $f(a) = a$ und $f^n \to a$ für $n \to \infty$, lokal gleichmäßig in G. Ist $a \in \mathbb{C}$, so gilt außerdem $|f'(a)| < 1$.*
(ii) $\operatorname{dist}(f^n(z), \partial G) \to 0$ *für $n \to \infty$, lokal gleichmäßig für $z \in G$.*
(iii) *f ist bijektiv, und es existiert eine Folge (m_k) in $\mathbb{N}$ mit $f^{m_k} \to \mathrm{id}_G$ lokal gleichmäßig in G, d.h., $f^{m_k}(z) \to z$ lokal gleichmäßig für $z \in G$.*

Bemerkung. In (ii) bezeichnet $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ den chordalen Abstand zwischen Punkten und Mengen, das heißt, für $A, B \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ist
$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf_{(a,b)\in(A,B)} \chi(a,b)$$
und für $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ ist
$$\operatorname{dist}(z,A) = \operatorname{dist}(\{z\},A).$$

Beweis. Wir betrachten die Menge aller Funktionen $\phi : G \to \widehat{\mathbb{C}}$, für die eine eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ mit $n_k \to \infty$ existiert, so dass $f^{n_k} \to \phi$ lokal gleichmäßig in G. Für jedes $\phi \in L$ gilt dann $\phi(G) \subset \overline{G}$.

Fall 1. Die Menge L enthält eine nicht-konstante Funktion ϕ. Da ϕ eine offene Abbildung ist, folgt $\phi(G) \subset G$. Mit n_k wie in der Definition von L sei $m_k := n_{k+1} - n_k$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $m_k \to \infty$ annehmen, da man sonst eine Teilfolge von (n_k) betrachten kann. Wegen der Normalität existiert dann eine Teilfolge (m_{k_j}) von (m_k) mit

$$f^{m_{k_j}} \to \psi \text{ für ein } \psi\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}.$$

Wegen

$$f^{n_{k_j+1}} = f^{m_{k_j}+n_{k_j}} = f^{m_{k_j}} \circ f^{n_{k_j}} (= f^{n_{k_j}} \circ f^{m_{k_j}})$$

folgt

$$\phi = \psi \circ \phi$$

Dies liefert zunächst zusammen mit dem Identitätssatz, dass $\psi(z) = z$ für alle $z \in G$.

Aus $f^{m_{k_j}} \to \mathrm{id}_G$ folgt sofort, dass f injektiv ist. Mit dem Satz von Hurwitz folgt daraus aber auch, dass f surjektiv ist. Insgesamt folgt (iii).

Fall 2. Die Menge L besteht nur aus konstanten Funktionen und eine dieser Konstanten ist in G, etwa $f^{n_k} \to a \in G$. Für $z \in G$ gilt dann auf Grund der Stetigkeit von f, dass

$$f(a) = f(\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(z)) = \lim_{k\to\infty} f(f^{n_k}(z)) = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(f(z)) = a.$$

Es gilt also $f(a) = a$. Würde nun nicht $f^n \to a$ gelten, so gäbe es eine Teilfolge (f^{m_k}) und $b \in \widehat{\mathbb{C}} \backslash \{a\}$ mit $f^{m_k} \to b$. Wegen $f^{m_k}(a) = a$ ist dies aber unmöglich. Also gilt $f^n \to a$.

Sei nun $a \neq \infty$. Nach dem Satz von Weierstraß gilt dann $(f^n)' \to 0$. Für genügend große n ist insbesondere $|(f^n)'(a)| < 1$. Wegen

$$(f^n)'(a) = f'(f^{n-1}(a)) \cdot f'(f^{n-2}(a)) \cdot \ldots \cdot f'(a) = f'(a)^n$$

folgt $|f'(a)| < 1$. Dies ergibt (i).

Fall 3. Die Menge L besteht nur aus konstanten Funktionen, aber keine dieser Konstanten ist in G. In diesem Fall folgt leicht (ii). □

Bemerkung. 1. Im Falle (ii) folgt im Allgemeinen *nicht*, dass $a \in \partial G$ mit $f^n \to a$ existiert. Dies gilt aber zum Beispiel falls $G = \mathbb{D}$ (Satz von Denjoy-Wolff), oder unter geeigneten Voraussetzungen über die Fortsetzbarkeit von f auf ∂G. (Siehe Übung).

2. Ein Gebiet $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $G \neq \widehat{\mathbb{C}}$, heißt m-fach zusammenhängend, falls $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ aus m Zusammenhangskomponenten besteht. (Hier ist $m \in \mathbb{N}$ oder $m = \infty$.) Es gilt: Ist G mindestens 3-fach zusammenhängend, so tritt Fall (iii) nur dann auf, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = \mathrm{id}_G$ existiert (Beweis hier nicht.) Ist G einfach oder zweifach zusammenhängend, so kann Fall (iii) auch sonst eintreten. Sei dazu $0 < R \leq \infty$ und $G = D(0, R)$, oder $0 \leq r < R \leq \infty$ und $G = \{z \in \mathbb{C}\colon r < |z| < R\}$, und sei $\theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ und $f\colon G \to G$, $\quad f(z) = e^{2\pi i\theta} z$. Dann ist f biholomorph, und $f^n(z) = e^{2\pi i n\theta} z$, also $f^n \neq \mathrm{id}_G$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sind $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ mit $m_k, n_k \to \infty$,

$$\left|\theta - \frac{m_k}{n_k}\right| < \frac{\varepsilon_k}{n_k}, \quad \varepsilon_k \to 0,$$

so folgt

$$f^{n_k}(z) = e^{2\pi i n_k \theta} z = e^{2\pi i (n_k\theta - m_k)} z = (1 + o(1))z$$

für $k \to \infty$, also $f^{n_k} \to \mathrm{id}_G$.

Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiet, $f\colon G \to G$ meromorph. Die Voraussetzungen von Satz 4.1 sind nach Satz von Montel erfüllt, falls $\widehat{\mathbb{C}}\backslash G$ mindestens 3 Punkte hat. Nach Satz 4.1 ist dann das Iterationsverhalten von f vergleichsweise einfach.

Nach geeigneter Normalisierung verbleiben drei Fälle:

(i) $\widehat{\mathbb{C}}\backslash G = \emptyset$, also $G = \widehat{\mathbb{C}}$, und $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ist meromorph. Dann ist f *rational.*
(ii) $\widehat{\mathbb{C}}\backslash G = \{\infty\}$, also $G = \mathbb{C}$, und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph, also f *ganz.*
(iii) $\widehat{\mathbb{C}}\backslash G$ hat zwei Punkte, etwa $\widehat{\mathbb{C}}\backslash G = \mathbb{C}\backslash\{0, \infty\}$.

Wir betrachten Fall (iii) hier nicht weiter, bemerken aber, dass er weitgehend analog zu Fall (ii) und teilweise auch Fall (i) ist.

Die Iteration von Möbiustransformationen ist einfach; vgl. Übung. Wir betrachten ab jetzt immer den Fall, dass f *ganz oder rational ist, aber nicht konstant ist und auch keine Möbiustransformation ist.*

Wir bezeichnen mit $D(f)$ den Definitionsbereich von f, also $D(f) = \widehat{\mathbb{C}}$ falls f rational oder $D(f) = \mathbb{C}$ falls f ganz. Für Polynome (vom Grad mindestens 2) sind beide Sichtweisen möglich, aber im Allgemeinen werden wir Polynome als rationale Funktionen mit Definitionsbereich $\widehat{\mathbb{C}}$ betrachten.

Definition 4.1. Die Menge

$$F := F(f) := \{z \in D(f)\colon \{f^n\} \text{ ist normal in } z\}$$

heißt *Fatoumenge* und

$$J := J(f) := \{z \in D(f)\colon \{f^n\} \text{ ist nicht normal in } z\}$$

heißt *Juliamenge* von f.

Bemerkung. Es gilt $J(f) = D(f)\backslash F(f)$, also $J = \widehat{\mathbb{C}}\backslash F$ für f rational und $J = \mathbb{C}\backslash F$ für f ganz.

Satz 4.2. (i) *F ist offen und J ist abgeschlossen (in $D(f)$).*
(ii) *$z \in F \Leftrightarrow f(z) \in F$ und $z \in J \Leftrightarrow f(z) \in J$.*
(iii) *$F(f^p) = F(f)$ und $J(f^p) = J(f)$ für $p \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung. Zu Eigenschaft (ii) sagt man auch: F und J sind *vollständig invariant* (unter f).

Beweis. Zu (i): Dies folgt direkt aus der Definition.

Zu (ii): Ganz allgemein gilt für eine Familie $\mathcal{F}$ in einem Gebiet H meromorpher Funktionen und für eine nicht konstante meromorphe Funktion $h\colon G \to H$, dass $\{f \circ h\colon f \in \mathcal{F}\}$ genau dann normal in einem Punkt $z \in G$ ist, wenn $\mathcal{F}$ normal in $h(z)$ ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned} f(z) \in F(f) \quad &\Leftrightarrow \quad \{f^n\} \text{ normal in } f(z) \\ &\Leftrightarrow \quad \{f^{n+1}\} = \{f^n \circ f\} \text{ normal in } z \\ &\Leftrightarrow \quad \{f^n\} \text{ normal in } z \\ &\Leftrightarrow \quad z \in F(f) \end{aligned}$$

Die Behauptung für J folgt analog, oder durch Komplementbildung.

Zu (iii): Zunächst gilt $F(f) \subset F(f^p)$, da

$$\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}} \supset \{(f^p)^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f^{pn}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Wir zeigen nun, dass auch $J(f) \subset J(f^p)$ gilt.

Sei dazu $z_0 \in J(f)$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $z_0 \neq \infty$ gilt; vgl. dazu auch den folgenden Satz 4.3. Nach Zalcman-Lemma findet man in jeder Umgebung U von z_0 dann eine Folge (z_k) sowie Folgen (n_k) in $\mathbb{N}$ und (ϱ_k) mit $\varrho_k \to 0$ und

$$f^{n_k}(z_k + \varrho_k z) \to g(z),$$

wobei $g\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ nicht konstant (und g ganz, falls f ganz). Nun existiert eine Teilfolge (n_{k_j}) mit $n_{k_j} = m_j p + r$, wobei $m_j \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq p-1$. Es folgt

$$(f^p)^{m_j+1} = f^{p-r+n_{k_j}} = f^{p-r} \circ f^{n_{k_j}}$$

und damit

$$(f^p)^{m_j+1}(z_{k_j} + \varrho_{k_j} z) \to f^{p-r}(g(z)).$$

Nach dem Zalcman-Lemma ist f^p nicht normal in U, und damit nicht in z_0. □

Bemerkung. Das Argument im Beweis von (iii) zeigt allgemein: Sind G, H Gebiete in $\widehat{\mathbb{C}}$, ist $\mathcal{F} \subset \{f\colon G \to H \text{ meromorph}\}$ nicht normal und ist h meromorph in H und nicht konstant, so ist $\{h \circ f\colon f \in \mathcal{F}\}$ nicht normal.

Definition 4.2. Seien f, g beide rational oder beide ganz und sei $D = D(f) = D(g)$. Sei $T\colon D \to D$ ein Homöomorphismus, d.h., T ist bijektiv und T und T^{-1} sind stetig. Es gelte $g = T \circ f \circ T^{-1}$. Dann heißen f und g *konjugiert* (durch T).

Sind f und g konjugiert durch T, so gilt $g^n = T \circ f^n \circ T^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Idee beim Begriff der Konjugation ist, dass alle wichtigen Konzepte von f auf g übertragen werden. Es ist leicht zu sehen, dass Konjugation eine Äquivalenzrelation auf der Menge der rationalen bzw. ganzen Funktionen ist.

In unseren Anwendungen wird die Funktion T in der Regel eine Möbiustransformation sein. Es gibt aber durchaus auch Anwendungen, wo dies nicht der Fall ist.

Satz 4.3. *Seien f, g konjugiert durch T. Dann gilt $F(g) = T(F(f))$ und $J(g) = T(J(f))$.*

Beweis. Übung □

Beispiel (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 1). Seien $f, g, T\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = z^2, \quad g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{und} \quad T(z) = \frac{z+1}{z-1}.$$

Dann gilt $J(f) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ und $J(g) = T(J(f)) = \{it\colon t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$.

Definition 4.3. Sei $z \in D(f)$. Dann heißt

$$O^+(z) = \{f^n(z)\colon n \in \mathbb{N}_0\}$$

Vorwärtsorbit von z (unter f) und

$$O^-(z) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(z) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\zeta\colon f^n(\zeta) = z\}$$

Rückwärtsorbit von z (unter f). Weiter heißt

$$O(z) = O^+(z) \cup O^-(z)$$

Orbit. Für $A \subset D(f)$ setzt man

$$O^{(\pm)}(A) = \bigcup_{z\in A} O^{(\pm)}(z).$$

Bemerkung. Satz 4.2 (ii) besagt, dass $O(F) = F$ und $O(J) = J$.

Definition 4.4. Ein Punkt $z \in D(f)$ heißt *Ausnahmepunkt*, falls $O^-(z)$ endlich ist. Die Menge der Ausnahmepunkte bezeichnen wir mit $E = E(f)$.

Beispiele. 1. Sei $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ f(z) = z^d$, mit $|d| \geq 2$. Für $d \geq 2$ gilt $O^-(\infty) = \{\infty\}$ und $O^-(0) = \{0\}$. Für $d \leq -2$ gilt $O^-(\infty) = \{0, \infty\} = O^-(0)$. In beiden Fällen gilt $E(f) = \{0, \infty\}$.

2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = e^z$. Dann gilt $E(f) = \{0\}$. Allgemeiner gilt dies für $f(z) = z^m e^{g(z)}$ mit $m \geq 0$ und g ganz.

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3 gilt $E(g) = T(E(f))$.

Satz 4.4. *Sei $A \subset D(f)$ abgeschlossen, $|A| \geq 3$ und $f^{-1}(A) \subset A$. Dann gilt $J(f) \subset A$.*

Beweis. Sei $B = D(f) \setminus A$. Dann ist B offen und es gilt $f(B) \subset B$. Wegen $|A| \geq 3$ folgt aus dem Satz von Montel, dass $B \subset F(f)$. Also gilt $J(f) = D(f) \setminus F(f) \subset D(f) \setminus B = A$. ☐

Satz 4.5. *Sei $z_0 \notin E(f)$. Dann gilt $J \subset \overline{O^-(z_0)}$. Ist außerdem $z_0 \in J$, so gilt $J = \overline{O^-(z_0)}$.*

Beweis. Sei $A = \overline{O^-(z_0)}$. Da $f^{-1}(O^-(z_0)) \subset O^-(z_0)$ und da f offen ist, gilt $f^{-1}(A) \subset A$. Mit Satz 4.4 folgt $J(f) \subset A = \overline{O^-(z_0)}$.

Ist $z_0 \in J(f)$, so folgt $O^-(z_0) \subset J(f)$ wegen der vollständigen Invarianz von $J(f)$, und damit $\overline{O^-(z_0)} \subset J(f)$, da $J(f)$ abgeschlossen ist. ☐

Bemerkung. In vielen konkreten Fällen findet man sehr leicht Punkte $z_0 \in J \backslash E$. (Dies werden wir in Kürze sehen). Satz 4.5 führt dann zu einem offensichtlichen Algorithmus, Computergraphiken von $J(f)$ zu erzeugen, zumindest falls man f^{-1} leicht berechnen kann (etwa für Polynome kleinen Grades).

Satz 4.6. (i) *Ist $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ rational, so gilt $|E(f)| \leq 2$ und $E(f) \subset F(f)$. Gilt $|E(f)| = 1$, so ist f (durch eine Möbiustransformation) konjugiert zu einem Polynom. Gilt $|E(f)| = 2$, so ist f (durch eine Möbiustransformation) konjugiert zu $z \mapsto z^d$, wobei $|d| \geq 2$.*

(ii) *Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz, so gilt $|E(f)| \leq 1$. Gilt $|E(f)| = 1$, so ist f (durch eine Möbiustransformation) zu einer Funktion g der Form $g(z) = z^m e^{h(z)}$ konjugiert, mit $m \in \mathbb{N}_0$ und h ganz.*

Beweis. Zu (i): Sei $f = P/Q$ mit teilerfremden Polynomen P, Q und sei $d = \operatorname{grad}(f) = \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\} \geq 2$.

Wir zeigen zunächst: Ist $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ endlich, so gilt $|f^{-1}(A)| \geq d|A| - (2d-2)$. Wir können dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\infty \notin A$ und $\infty \notin f^{-1}(A)$ gilt, da wir andernfalls eine geeignete Konjugation durchführen können.

Dann gilt für $a \in A$ genau dann $f(z) = a$, wenn

$$\frac{P(z) - aQ(z)}{Q(z)} = 0$$

gilt. Der Zähler hat hier Grad d. Also ist die Anzahl der a-Stellen von f genau d, gezählt gemäß Vielfachheit. Außerdem liegen (wegen $\infty \notin f^{-1}(A)$) diese a-Stellen alle in $\mathbb{C}$. Weiter hat

$$f' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

höchstens $2d - 2$ Nullstellen in $\mathbb{C}$. Hiermit erhalten wir, wie oben behauptet, dass

$$|f^{-1}(A)| \geq d|A| - (2d-2) = d(|A| - 2) + 2 = (d-1)(|A| - 2) + |A|.$$

Ist $|A| > 2$, so folgt mit $d \geq 2$, dass

$$|f^{-1}(A)| \geq (d-1)(|A| - 2) + |A| \geq 1 + |A|$$

und damit

$$|f^{-n}(A)| \geq 1 + |f^{-(n-1)}(A)| \geq \ldots \geq n + |A|$$

also $|O^{-}(A)| = \infty$ und folglich $A \not\subset E(f)$. Damit erhalten wir $|E(f)| \leq 2$.

Sei nun $|E(f)| = 1$. Dann ist f (durch eine Möbiustransformation) konjugiert zu einer rationalen Funktion g mit $E(g) = \{\infty\}$. Wegen $g^{-1}(E(g)) \subset E(g)$, also $g^{-1}(\infty) \subset \{\infty\}$, ist g ein Polynom.

Leicht folgt, dass $R > 0$ mit $|g(z)| > R$ für $|z| > R$ existiert. Damit gilt

$$E(g) \subset \{z \colon |z| > R\} \cup \{\infty\} \subset F(g)$$

nach dem Satz von Montel.

Sei $|E(f)| = 2$. Hier findet man eine zu f durch eine Möbiustransformation konjugierte rationale Funktion g mit $E(g) = \{0, \infty\}$.

Fall 1. $g(0) = 0,\ g(\infty) = \infty$: Dann ist g Polynom mit Nullstelle nur in 0, also $g(z) = cz^d$, wobei $d \geq 2,\ c \neq 0$. Durch weitere Konjugation mit $z \mapsto az$ kann man $c = 1$ erreichen.

Fall 2. $g(0) = \infty,\ g(\infty) = 0$: Analog wie vorher gilt $g(z) = cz^d,\ d \leq -2$, und man kann wieder $c = 1$ wählen.

Leicht folgt in beiden Fällen, dass $E(f) \subset F(f)$.

Zu (ii): Man kann f als transzendent annehmen. Nach dem großem Satz von Picard gilt $|f^{-1}(a)| = \infty$ für alle $a \in \mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme, also $|O^{-}(a)| = \infty$ für diese a. Damit gilt $|E(f)| \leq 1$.

Gilt $|E(f)| = 1$, so ist f konjugiert zu einer Funktion g mit $E(g) = \{0\}$. Hieraus folgt mit Satz 2.7, dass g die genannte Form hat. □

Bemerkung. Im Fall (ii) gibt es Beispiele mit $\emptyset \neq E(f) \subset F(f)$, aber auch Beispiele mit $\emptyset \neq E(f) \subset J(f)$.

Satz 4.7. *Ist $U \subset D(f)$ offen mit $U \cap J \neq \emptyset$, so gilt $O^{+}(U) \supset D(f) \backslash E$ und $O^{+}(U \cap J) \supset J \backslash E$.*

Beweis. Nach dem Satz von Montel gilt $|\widehat{\mathbb{C}} \backslash O^{+}(U)| \leq 2$. Sei nun $z_0 \notin O^{+}(U)$. Dann gilt $O^{-}(z_0) \cap O^{+}(U) = \emptyset$. Es folgt $|O^{-}(z_0)| \leq 2$, also $z_0 \in E$. Wir erhalten $O^{+}(U) \supset D(f) \backslash E$.

Die zweite Behauptung folgt mit der vollständigen Invarianz von J. □

Bemerkung. 1. Für rationales f ist $E \subset F$, also folgt sogar $O^{+}(U \cap J) = J$.

2. Ist $K \subset D(f) \backslash E(f)$ kompakt, so besitzt die durch $O^{+}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ gegebene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung. Damit existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} f^n(U),$$

also

$$K \cap J \subset \bigcup_{n=1}^{N} f^n(U \cap J).$$

Für rationales f kann man $K = J$ wählen und erhält

$$J \subset \bigcup_{n=1}^{N} f^n(U \cap J).$$

Später werden wir sehen, dass sogar

$$J \subset f^n(U \cap J)$$

für alle genügend großen n gilt. Diese Inklusionen erklären (teilweise) die *Selbstähnlichkeit* von Juliamengen.

Satz 4.8. *Falls $F(f) \neq \emptyset$, also $J(f) \neq D(f)$, so hat $J(f)$ keine inneren Punkte.*

Beweis. Sei z_0 innerer Punkt von $J(f)$. Dann existiert eine offen Menge U mit $z_0 \in U \subset J(f)$. Nach Satz 4.6 gilt $O^+(U) \supset D(f) \backslash E(f)$. Wegen der vollständigen Invarianz gilt $O^+(U) \subset J(f)$. Also folgt $J(f) \supset D(f) \backslash E(f)$. Damit erhält man $F(f) \subset E(f)$. Dies liefert $F(f) = \emptyset$, da $F(f)$ offen ist und $|E(f)| \leq 2$ gilt. ☐

Bemerkung. Der Fall $F(f) = \emptyset$ kann auftreten: Für

$$f(z) = \frac{(z-2)^2}{z^2} \quad \text{und} \quad f(z) = e^z$$

gilt $F(f) = \emptyset$, also $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$ bzw. $J(f) = \mathbb{C}$. Dies werden wir (teilweise) später beweisen.

Umgekehrt gilt aber immer $J(f) \neq \emptyset$.

Satz 4.9. $|J(f)| = \infty$.

Beweis. Der Beweis erfolgt hier nur für rationales f, wobei wir natürlich immer $\operatorname{grad}(f) \geq 2$ voraussetzen.

Wir nehmen zunächst an, dass $J(f) = \emptyset$ gilt. Dann existiert eine Teilfolge (f^{n_k}) von (f^n) mit $f^{n_k} \to \varphi \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Durch Konjugation kann man $\varphi \not\equiv \infty$ erreichen, und dann ist φ meromorph und damit rational. Für $a \in \mathbb{C}$ haben nach dem Satz von Hurwitz die Funktionen f^{n_k} und φ für genügend großes k gleich viele a-Stellen. Dies ist aber wegen $\operatorname{grad}(f^{n_k}) = \operatorname{grad}(f)^{n_k} \to \infty$ ein Widerspruch.

Damit existiert also $z_0 \in J(f)$. Wegen der vollständigen Invarianz gilt $O^-(z_0) \subset J$. Da $E(f) \subset F(f)$, gilt $|O^-(z_0)| = \infty$. Die Behauptung folgt. ☐

Definition 4.5. Eine Teilmenge M eines metrischen Raums heißt *perfekt*, falls gilt:

(i) $M \neq \emptyset$;
(ii) M ist abgeschlossen;
(iii) Jeder Punkt von M ist Häufungspunkt von M.

Bemerkung. Punkte von M, die keine Häufungspunkte sind, heißen *isoliert.* Eigenschaft (iii) besagt, dass M keine isolierten Punkte hat.

Satz 4.10. *$J(f)$ ist perfekt.*

Beweis. Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 4.5 sind bereits bekannt.

Zu (iii): Wegen $|J| = \infty$ und $|E| \leq 2$ existiert $z_0 \in J \backslash E$. Falls $|O^+(z_0)| = \infty$, sei $z_1 = z_0$. Falls $|O^+(z_0)| < \infty$, sei $z_1 \in O^-(z_0) \backslash (E \cup O^+(z_0))$. In beiden Fällen gilt $z_1 \notin O^-(z_1)$, also $f^n(z_1) \neq z_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der vollständigen Invarianz von J gilt $z_1 \in J$. Damit gilt $z_1 \in \overline{O^-(z_1)} = J$, aber $z_1 \notin O^-(z_1)$. Daher ist z_1 Häufungspunkt von $O^-(z_1)$ und wegen $O^-(z_1) \subset J$ damit auch Häufungspunkt von J. Also ist z_1 nicht isoliert.

Aus $J = \overline{O^-(z_1)}$ folgt jetzt auch, dass kein anderer Punkt von J isoliert ist. ☐

Bemerkung. Man kann (relativ leicht) zeigen, dass perfekte Mengen überabzählbar sind.

5. Periodische Punkte

Definition 5.1. Sei $z_0 \in D(f)$. Der Punkt z_0 heißt *periodisch*, falls $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(z_0) = z_0$ existiert. Das kleinste n mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von z_0.

Sei nun z_0 periodisch mit Periode n. Der *Multiplikator* λ von z_0 ist dann definiert durch

$$\lambda = (f^n)'(z_0) \quad \text{falls } z_0 \in \mathbb{C}$$

und

$$\lambda = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f^n(\frac{1}{z})}\right)\Big|_{z=0} \quad \text{falls } z_0 = \infty.$$

Der Punkt z_0 heißt *anziehend* (oder attraktiv), falls $|\lambda| < 1$, *indifferent* (oder neutral), falls $|\lambda| = 1$, und *abstoßend* (oder repulsiv), falls $|\lambda| > 1$.

Falls $|\lambda| = 1$, so existiert $\alpha \in [0,1)$ mit $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$. Der Punkt z_0 heißt *rational indifferent*, falls $\alpha \in \mathbb{Q}$, und *irrational indifferent*, falls $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Der Punkt z_0 heißt *superattraktiv*, falls $\lambda = 0$. Periodische Punkte der Periode 1 heißen *Fixpunkte*.

Bemerkung. Seien f und g durch eine Möbiustransformation T konjugiert, d.h., es gelte $g = T \circ f \circ T^{-1}$. Dann gilt: *Ist z_0 periodischer Punkt von f, so ist $T(z_0)$ periodischer Punkt von g, mit gleicher Periode und gleichem Multiplikator.* Denn ist $f^n(z_0) = z_0$, so gilt $g^n(T(z_0)) = T(f^n(T^{-1}(T(z_0)))) = T(f^n(z_0)) = T(z_0)$, und umgekehrt folgt aus $g^n(T(z_0)) = T(z_0)$ auch $f^n(z_0) = z_0$. Die Behauptung über die Multiplikatoren folgt aus der Kettenregel. Für $z_0 = \infty$ oder $T(z_0) = \infty$ ist sie Teil der Definition.

Satz 5.1. *Abstoßende und rational indifferente periodische Punkte liegen in der Juliamenge.*

Beweis. Wegen $J(f) = J(f^n)$ reicht es, Fixpunkte zu betrachten. Sei also z_0 abstoßender oder rational indifferenter Fixpunkt von f. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $z_0 \in \mathbb{C}$. Es gilt also $f(z_0) = z_0$ und $|f'(z_0)| > 1$ bzw. $f'(z_0) = e^{2\pi i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$. Wir nehmen an, dass $z_0 \in F$. Dann existiert eine Umgebung U von z_0, eine Teilfolge (f^{n_k}) von (f^n) und eine Funktion $\varphi\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f^{n_k}|_U \to \varphi$. Wegen $f^{n_k}(z_0) = z_0$ folgt $\varphi(z_0) = z_0$. Insbesondere gilt also $\varphi(z) \not\equiv \infty$. Nach dem Satz von Weierstraß ist φ meromorph.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass z_0 abstoßend ist, also $|f'(z_0)| > 1$ gilt. Es folgt

$$(f^n)'(z_0) = f'(f^{n-1}(z_0)) \cdot f'(f^{n-2}(z_0)) \cdot \ldots \cdot f'(z_0) = f'(z_0)^n \to \infty.$$

Andererseits gilt aber nach dem Satz von Weierstraß auch $(f^{n_k})'(z_0) \to \varphi'(z_0) \neq \infty$. Das ist ein Widerspruch.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass z_0 rational indifferent ist, etwa

$$f'(z_0) = e^{2\pi i p/q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le p < q.$$

Dann gilt $(f^q)'(z_0) = (f'(z_0))^q = e^{2\pi i p} = 1$. Wegen $J(f^q) = J(f)$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $q = 1$ annehmen, d.h., $f'(z_0) = 1$.

Es gibt dann eine Entwicklung der Form

$$f(z) = z + a_m(z - z_0)^m + O((z - z_0)^{m+1}), \quad z \to z_0$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $a_m \in \mathbb{C}$, $m \ge 2$, $a_m \neq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(f(z)) &= z + a_m (z - z_0)^m + a_m (f(z) - z_0)^m + O\left((z - z_0)^{m+1}\right) \\ &= z + a_m (z - z_0)^m + a_m ((z - z_0) + a_m(z - z_0)^m)^m + O\,(z - z_0)^{m+1} \\ &= z + 2a_m (z - z_0)^m + O\left((z - z_0)^{m+1}\right) \end{aligned}$$

Induktiv zeigt man

$$f^n(z) = z + n a_m (z - z_0)^m + O((z - z_0)^{m+1}).$$

Es folgt

$$(f^n)^{(m)}(z_0) = n a_m m! \to \infty$$

für $n \to \infty$, im Widerspruch zu

$$(f^{n_k})^{(m)}(z_0) \to \varphi^{(m)}(z_0)$$

für $k \to \infty$. $\square$

Satz 5.2. *Sei f rational. Dann hat f einen Fixpunkt, der abstoßend ist oder Multiplikator* 1 *hat.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f(\infty) \neq \infty$ annehmen, da wir andernfalls f geeignet konjugieren können.

Schreiben wir dann f in der Form $f = P/Q$ mit teilerfremden Polynomen P und Q, so gilt

$$\operatorname{grad}(P) \leq \operatorname{grad}(Q) = \operatorname{grad}(f) =: d.$$

Seien $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ die Fixpunkte von f. Wir nehmen an, dass

$$|f'(z_j)| \leq 1 \quad \text{und} \quad f'(z_j) \neq 1$$

für alle $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gilt. Dann hat die durch

$$z \mapsto f(z) - z = \frac{P(z) - zQ(z)}{Q(z)}$$

gegebene Funktion keine mehrfachen Nullstellen. Mit $g(z) = P(z) - zQ(z)$ folgt, dass

$$m = \operatorname{grad}(g) = d + 1 \geq 3.$$

Für

$$R > \max_{j=1,\ldots,m} |z_j|$$

ist nun

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z - f(z)} &= \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}\left(\frac{1}{z - f(z)}, z_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lim_{z \to z_j} \frac{z - z_j}{z - f(z)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - f'(z_j)}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist wegen $f(\infty) \neq \infty$ die Laurentreihen-Entwicklung um ∞ von der Form

$$\frac{1}{z - f(z)} = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z - f(z)} = 1.$$

Damit ist

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - f'(z_j)} = 1.$$

Nun gilt für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \leq 1$ und $w \neq 1$, dass

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - w}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$1 = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1 - f'(z_j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - f'(z_j)}\right) \geq \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2} = \frac{d+1}{2}.$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung. Satz 5.2 liefert in Verbindung mit Satz 5.1 einen neuen Beweis, dass für rationale Funktionen die Juliamenge nicht leer ist. Der Beweis ist konstruktiv und liefert eine Möglichkeit, für gegebenes f einen Punkt $z_0 \in J(f)$ zu finden. Da $J(f) = \overline{O^-(z_0)}$ nach Satz 4.5, erhält man so eine Möglichkeit, Computergraphiken von $J(f)$ zu erzeugen.

Satz 5.3. *Anziehende periodische Punkte sind in der Fatoumenge.*

Beweis. Es reicht wieder, Fixpunkte zu betrachten. Sei also $f \in F$ und $z_0 \in D$ anziehender Fixpunkt von f. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 \neq \infty$, also $|f'(z_0)| < 1$.

Dann existiert $r > 0$ mit

$$\frac{|f(z) - z_0|}{|z - z_0|} = \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| < 1 \text{ für } z \in D(z_0, r).$$

Es folgt $f(D(z_0, r)) \subset D(z_0, r)$ und damit $D(z_0, r) \subset F$ nach Satz von Montel. $\square$

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass man auch $\alpha < 1$ und $\varrho > 0$ mit $|f(z) - z_0| < \alpha|z - z_0|$ für $z \in D(z_0, \varrho)$ finden kann. Es folgt, dass $|f^n(z) - z_0| < \alpha^n|z - z_0|$ und damit $f^n(z) \to z_0$ für $z \in D(z_0, \varrho)$.

Definition 5.2. Sei z_0 anziehender periodischer Punkt der Periode p von f. Dann heißt

$$A(z_0) = \{z\colon \lim_{k\to\infty} f^{pk}(z) = z_0\}$$

der *Einzugsbereich* von z_0. Die Komponente von $F(f)$, die z_0 enthält, heißt *unmittelbarer Einzugsbereich* von z_0 und wird mit $A^*(z_0)$ bezeichnet.

Bemerkung. Die Bemerkung vor Definition 5.2 zeigt, dass

$$A(z_0) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-pk}(U)$$

für eine (offene) Umgebung U von z_0 gilt. (Dort war $U = D(z_0, \varrho)$). Es folgt, dass $A(z_0)$ offen ist. Es gilt

$$z_0 \in A^*(z_0) \subset A(z_0) \subset F(f).$$

Satz 5.4. *Ist z_0 anziehender periodischer Punkt von f, so gilt $\partial A(z_0) = J(f)$.*

Bemerkung. Hat f drei anziehende periodische Punkte z_1, z_2, z_3, so folgt

$$J(f) = \partial A(z_1) = \partial A(z_2) = \partial A(z_3).$$

Dies zeigt, dass $J(f)$ komplizierte Struktur haben muss. (Man denke sich die $A(z_j)$ als Länder auf einer Landkarte: Jeder Punkt auf der Grenze ist ein „Dreiländereck“.)

Die $A(z_j)$ müssen nicht zusammenhängend sein. Es gibt aber auch Gebiete (d.h. zusammenhängende offene Mengen) A_1, A_2, A_3 mit $\partial A_1 = \partial A_2 = \partial A_3$, die sogenannten „Lakes of Wada“. (Ob dies auch in der komplexen Dynamik vorkommt, ist ein offenes Problem.)

Beweis von Satz 5.4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei z_0 Fixpunkt von f und es gelte $z_0 \neq \infty$.

Sei zunächst $z_1 \in \partial A(z_0)$. Dann gilt $z_1 \notin A(z_0)$, da $A(z_0)$ offen ist. Damit existiert $\varrho > 0$, so dass $|f^n(z_1) - z_0| \geq \varrho$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $z_1 \in F$. Dann existiert eine zusammenhängende Umgebung U von z_1 und eine Folge (n_k) mit $f^{n_k}|_U \to \varphi$. Nun gilt $\varphi(z) = z_0$ für alle $z \in U \cap A(z_0)$, nach Identitätssatz also $\varphi(z) \equiv z_0$. Insbesondere gilt $\varphi(z_1) = z_0$, im Widerspruch zu $|f^n(z_1) - z_0| \geq \varrho$. Also gilt $z_1 \in J$.

Sei nun $z_1 \in J$ und U Umgebung von z_1. Dann gilt $O^+(U) \supset D(f)\backslash E(f)$, insbesondere $O^+(U) \cap D(z_0, \varrho) \neq \emptyset$ für alle $\varrho > 0$. Damit folgt $U \cap A(z_0) \neq \emptyset$. Außerdem gilt $z_1 \notin A(z_0)$, da $z_1 \in J$. Hieraus folgt $U \cap \partial A(z_0) \neq \emptyset$ und damit $z_1 \in \partial A(z_0)$. □

Einer der grundlegenden Sätze der Theorie ist der folgende:

Satz 5.5. *$J(f)$ ist der Abschluss der Menge der abstoßenden periodischen Punkte von f.*

Bemerkung. Der Satz ist bedeutsam unter mehreren Gesichtspunkten. Einer davon ist historisch: Fatou baute seine Theorie im wesentlichen wie wir auf. Er startete mit der Menge der Nichtnormalität und bewies später dann auch obigen Satz 5.5 für rationales f. Julia startete mit der Menge der abstoßenden periodischen Punkte und zeigte dann auf ganz anderem Weg, dass dies die Menge der Nichtnormalität ist, wiederum nur für rationales f. Für ganze Funktionen f ganz wurde der Satz erstmalig von Baker 1968 bewiesen. Der hier gegebene Beweis von Duval und Berteloot ist relativ neu (2000). Er baut auf Ideen von Schwick (1996) und Bargmann (1999) auf.

Zum Beweis von Satz 5.5 benötigen zunächst wir einige Hilfsmittel.

Definition 5.3. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und nicht konstant, $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Dann heißt *$a$ vollständig verzweigt* (bzgl. f), falls f keine einfachen a-Stellen hat; d.h. ist $a \in \mathbb{C}$, so folgt aus $f(z) = a$, dass $f'(z) = 0$, und ist $a = \infty$, so hat f keine einfachen Pole. Mit $V(f)$ bezeichnen wir die Menge der vollständig verzweigten Werte.

Satz 5.6. *Sei $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und nicht konstant. Dann ist $V(f) \cap f(\mathbb{C})$ eine diskrete Teilmenge von $f(\mathbb{C})$. Insbesondere ist $V(f)$ abzählbar und hat höchstens zwei Häufungspunkte in $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Ist $a = f(z_0) \in \widehat{\mathbb{C}}$, so existiert eine Umgebung U von z_0 mit $f(z) \in \mathbb{C}$ und $f'(z) \neq 0$ für $z \in U\backslash\{z_0\}$. Damit ist $f(U)$ Umgebung von a, die höchstens einen Punkt von $V(f)$ enthält. Also ist $V(f) \cap f(\mathbb{C})$ diskret in $f(\mathbb{C})$. Die zweite Behauptung folgt aus dem Satz von Picard. □

Bemerkung. Tatsächlich gilt $|V(f)| \leq 4$. Dies wurde zuerst von Nevanlinna 1924 gezeigt.

Beweis von Satz 5.5. Sei $A(f)$ die Menge der abstoßenden periodischen Punkte von f. Zu zeigen ist, dass $\overline{A(f)} = J(f)$. Nach Satz 5.1 gilt $A(f) \subset J(f)$, also auch $\overline{A(f)} \subset J(f)$, da $J(f)$ abgeschlossen ist. Zu zeigen bleibt, dass $J(f) \subset \overline{A(f)}$.

Dazu zeigen wir: Ist $U \subset D(f)$ offen mit $U \cap J(f) \neq \emptyset$, so gilt $U \cap A(f) \neq \emptyset$. Sei

$$C := (f')^-(0) = \{z \in D(f)\colon f'(z) = 0\}$$

und

$$P := O^+(C) \cup E(f) \cup O^+(\infty)$$

falls f rational bzw.

$$P := O^+(C) \cup E(f)$$

falls f ganz. Dann ist P abzählbar. Da J perfekt ist, existiert $a \in (U \cap J(f))\backslash P$.

Nach dem Zalcman-Lemma (Satz 3.3) und der daran anschließenden Bemerkung existieren nun eine Folge (z_k) in U mit $z_k \to a$, eine Folge (ϱ_k) mit $\varrho_k > 0$ und $\varrho_k \to 0$ und eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$, so dass

$$f^{n_k}(z_k + \varrho_k z) \to \phi(z)$$

für eine meromorphe, nicht konstante Funktion $\phi\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Da $a \notin E(f)$, gilt $J(f) = \overline{O^-(a)}$. Damit ist jeder der (überabzählbar vielen) Punkte von $U \cap J(f)$ Häufungspunkt von $O^-(a)$. Andererseits ist $U \cap V(\phi)$ diskret nach Hilfssatz 5.3. Damit existiert

$$b \in (U \cap O^-(a)) \backslash V(\phi).$$

Da $b \in O^-(a)$ existiert $p \in \mathbb{N}$ mit $f^p(b) = a$ und da $b \notin V(\phi)$ existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $\phi(c) = b$ und $\phi'(c) \neq 0$. Wegen $a \notin O^+(C)$ folgt $(f^p)'(b) \neq 0$.

Mit $\psi := f^p \circ \phi$ und $m_k = p + n_k$ folgt

$$f^{m_k}(z_k + \varrho_k z) = f^p(f^{n_k}(z_k + \varrho_k z)) \to f^p(\phi(z)) = \psi(z)$$

und damit

$$f^{m_k}(z_k + \varrho_k z) - (z_k + \varrho_k z) \to \psi(z) - a$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$. Nun gilt

$$\psi(c) = f^p(\phi(c)) = f^p(b) = a$$

und

$$\psi'(c) = (f^p)'(b)\phi'(c) \neq 0.$$

Nach dem Satz von Hurwitz existieren für genügend große k dann $c_k \in \mathbb{C}$ mit $c_k \to c$ und

$$f^{m_k}(z_k + \varrho_k c_k) - (z_k + \varrho_k c_k) = \psi(c) - a = 0.$$

Damit ist

$$a_k := z_k + \varrho_k c_k$$

periodischer Punkt von f, und es gilt $a_k \to a$, insbesondere also $a_k \in U$ für große k.

Weiter gilt

$$\varrho_k (f^{m_k})'(z_k + \varrho_k z) \to \psi'(z)$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$. Es folgt, dass

$$\varrho_k (f^{m_k})'(a_k) \to \psi'(c) \neq 0,$$

also $(f^{m_k})'(a_k) \to \infty$, womit a_k für genügend große k ein abstoßender periodischer Punkt ist. $\square$

Eine Anwendung von Satz 5.5 ist das folgende Resultat.

Satz 5.7. *Sei f rational, $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen, $U \cap J \neq \emptyset$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f^n(U \cap J) = J$ für alle $n \geq n_0$.*

Bemerkung. 1. In Satz 4.5 (sowie der anschließenden Bemerkung) hatten wir

$$\bigcup_{j=1}^{n} f^j(U \cap J) = J$$

gezeigt. Satz 5.7 verallgemeinert dies.

2. In Satz 4.5 hatten wir auch ganze Funktionen f betrachtet. Die dafür erzielten Ergebnisse lassen sich analog verallgemeinern.

Beweis von Satz 5.7. Nach Satz 5.5 enthält U einen abstoßenden periodischen Punkt $a \in \mathbb{C}$, d.h., es existieren $a \in U \backslash \{\infty\}$ und $p \in \mathbb{N}$ mit $f^p(a) = a$ und $|(f^p)'(a)| > 1$. Für r genügend klein ist $D(a, r) \subset U$ und $f^p|_{D(a,r)}$ injektiv. Außerdem gilt für kleine r auch

$$f^p(D(a, r)) \supset D(a, r),$$

wie man durch Betrachtung der Umkehrfunktion φ: $f^p(D(a, r)) \to D(a, r)$ von $f^p|_{D(a,r)}$ leicht einsieht, denn diese erfüllt $|\varphi'(a)| < 1$; vgl. Beweis zu Satz 5.3. Es folgt, dass

$$f^{pn}(D(a, r)) \supset f^{p(n-1)}(D(a, r))$$

und damit

$$f^{pn}(D(a,r)) = \bigcup_{j=1}^{n} f^{pj}(D(a,r)),$$

wegen

$$J(f^p) = J(f) =: J$$

also

$$f^{pn}(D(a,r) \cap J) = \bigcup_{j=1}^{n} f^{pj}(D(a,r)) \cap J = \bigcup_{j=1}^{n} f^{pj}(D(a,r) \cap J) = J$$

für große n. Wegen $D(a,r) \subset U$ folgt $f^{pn}(U \cap J) = J$ für große n, und damit $f^m(U \cap J) = J$ falls m groß genug ist. □

6. Lokale Fixpunkttheorie

Wir haben in §5 gesehen, dass die Fixpunkte der Iterierten eine wichtige Rolle in der Iterationstheorie spielen. In diesem Kapitel untersuchen wir das Iterationsverhalten in der Nähe von Fixpunkten. Bei den meisten Ergebnissen wird es lediglich darauf ankommen, dass die Funktion in einer Umgebung des Fixpunktes holomorph ist (und nicht, dass sie zu einer ganzen oder rationalen Funktion fortsetzbar ist). Historisch ist diese „lokale Theorie“ von Fixpunkten älter als die „globale Theorie“ von Fatou und Julia.

Satz 6.1. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U Umgebung von z_0, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_0) = z_0$.*
Sei $\lambda = f'(z_0)$ und es gelte $|\lambda| \neq 1$ und $\lambda \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung V von 0 und eine holomorphe Funktion $S\colon V \to \mathbb{C}$ mit $S(0) = z_0$, $S'(0) = 1$ und

$$f(S(z)) = S(\lambda z), \tag{6.1}$$

falls $z, \lambda z \in V$. Die Funktion S ist eindeutig in dem Sinne, dass zu gegebenem Gebiet V höchstens eine solche Funktion S existieren kann.

Bemerkung. 1. Wegen $S'(0) = 1 \neq 0$ ist $S\colon V \to S(V)$ bei genügend kleinem V bijektiv. Die Funktionalgleichung (6.1) erhält damit die Form $(S^{-1} \circ f \circ S)(z) = \lambda z$, d.h.,

$$S^{-1} \circ f \circ S = \lambda \, \mathrm{id}_W$$

für eine Umgebung W von 0. Dies bedeutet, dass f (in einem offensichtlichen Sinne) „lokal konjugiert“ zu $z \mapsto \lambda z$ ist.

Mit $\phi := S^{-1}$ kann man (6.1) bzw. die obigen Gleichungen auch als

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} = \lambda \, \mathrm{id}_W$$

bzw.

$$\phi(f(z)) = \lambda \phi(z) \tag{6.2}$$

schreiben.

Die Gleichungen (6.1) bzw. (6.2) wurden erstmals von Schröder (1870/71) betrachtet. Satz 6.1 ist von Kœnigs (1884). Die Funktionalgleichungen (6.1) und (6.2) werden nach Schröder, Kœnigs oder Poincaré benannt.

2. Sei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die durch $T(z) = S(cz)$ definierte Funktion T erfüllt dann ebenfalls (6.1) und es gilt $T'(0) = c$. Ist $p \in \mathbb{N}$, so erfüllt die durch $T(z) = S(cz^p)$ definierte Funktion T die Funktionalgleichung $T(\mu z) = f(T(z))$, falls $\mu^p = \lambda$. Jetzt gilt $T'(0) = 0$, falls $p \geq 2$. Die Bedingung $S'(0) = 1$ ist die übliche Normalisierung von S.

Beweis von Satz 6.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$.

Zur Existenz: Wir betrachten zuerst den Fall, dass $|\lambda| < 1$. Wir werden zeigen, dass

$$\phi(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z)}{\lambda^n}$$

in einer Umgebung von 0 existiert und (6.2) erfüllt. Dazu wählen wir $\delta > 0$ mit $(|\lambda| + \delta)^2 \leq |\lambda|$ und $r > 0$, so dass $\overline{D(0, r)} \subset U$ und

$$|f(z)| \leq (|\lambda| + \delta)|z| \quad \text{für } z \in \overline{D(0, r)}.$$

Da $f(z) - \lambda z = O(z^2)$ für $z \to 0$, existiert $K > 0$ mit

$$|f(z) - \lambda z| \leq K|z|^2 \quad \text{für } z \in \overline{D(0, r)}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \overline{D(0, r)}$ erhält man

$$|f^n(z)| \leq (|\lambda| + \delta)^n\ |z|$$

und damit

$$|f^{n+1}(z) - \lambda f^n(z)| = |f(f^n(z)) - \lambda f^n(z)| \leq K\ |f^n(z)|^2 \leq K(|\lambda| + \delta)^{2n}\ |z|^2,$$

also

$$\left|\frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} - \frac{f^n(z)}{\lambda^n}\right| \leq \frac{K}{|\lambda|} \left(\frac{(|\lambda| + \delta)^2}{|\lambda|}\right)^n\ |z|^2.$$

Es folgt, dass $f^n(z)/\lambda^n$ gleichmäßig für $z \in D(0, r)$ gegen eine Funktion $\phi\colon D(0, r) \to \mathbb{C}$ konvergiert. Diese ist nach dem Satz von Weierstraß holomorph und erfüllt $\phi(0) = 0$. Wegen $(f^n)'(0) = \lambda^n$ folgt auch $\phi'(0) = 1$.

Schließlich gilt

$$\phi(f(z)) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(f(z))}{\lambda^n} = \lambda \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} = \lambda\phi(z).$$

Wie in Bemerkung 1 bereits ausgeführt, ist $\phi\colon D(0, r) \to \phi(D(0, r))$ bijektiv, falls r genügend klein ist, und $S = \phi^{-1}$ leistet dann das Verlangte.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass $|\lambda| > 1$. Für U genügend klein ist $f\colon U \to f(U)$ bijektiv und für $g = f^{-1}$ gilt

$$|g'(0)| = \frac{1}{|\lambda|} < 1.$$

Nach dem bereits Bewiesenen existiert dann eine Funktion S mit

$$g(S(z)) = S\left(\frac{1}{\lambda}z\right)$$

für z aus einer geeigneten Umgebung von 0. Es folgt

$$S(\lambda z) = f(g(S(\lambda z))) = f\left(S\left(\frac{1}{\lambda}\lambda z\right)\right) = f(S(z))$$

für z aus einer Umgebung von 0, also (6.1).

Zur Eindeutigkeit: Seien S_1, S_2 Funktionen, die (6.1) erfüllen, mit $S_1'(0) = S_2'(0) = 1$. Dann existiert $h := S_2^{-1} \circ S_1$ in einer Umgebung von 0, mit $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$. Weiter folgt leicht aus (6.1), dass $h(\lambda z) = \lambda h(z)$ gilt. Sei nun $h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ die Potenzreihenentwicklung von h um 0. Dann folgt $a_1 = 1$ und $\lambda^k a_k = \lambda a_k$ für $k \geq 2$. Damit gilt $a_k = 0$ für $k \geq 2$, also $h(z) = z$ für alle z aus einer Umgebung von 0. Dies impliziert, dass $S_1 = S_2$. $\square$

Satz 6.2. *Sei f ganz oder rational und sei $z_0 \in D(f)$ abstoßender Fixpunkt von f mit Multiplikator λ. Dann existiert eine meromorphe Funktion $S\colon \mathbb{C} \to D(f)$, die der Funktionalgleichung $S(\lambda z) = f(S(z))$ genügt. Dabei kann S mit $S(0) = z_0$ und, falls $z_0 \in \mathbb{C}$, auch $S'(0) = 1$ gewählt werden. Mit dieser Normierung ist S eindeutig.*

Beweis. Man überlegt sich zuerst, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 \in \mathbb{C}$ gewählt werden kann. Nach Satz 6.1 existiert nun $r > 0$ und $S_0\colon D(0,r) \to D(f)$ mit $S(0) = z_0$, $S'(0) = 1$ und $S_0(\lambda z) = f(S_0(z))$ für $z \in D(0, r/|\lambda|)$, d.h.,

$$S_0(z) = f\left(S_0\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right) \qquad \text{für } z \in D(0,r).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber auch für $z \in D(0, |\lambda| r)$ definiert. Wir definieren also

$$S_1\colon D(0, |\lambda| r) \to D(f)$$

durch

$$S_1(z) = f\left(S_0\left(\frac{z}{|\lambda|}\right)\right).$$

Dann gilt

$$S_1|_{D(0,r)} = S_0.$$

Induktiv definiert man

$$S_k\colon D(0, |\lambda|^k r) \to D(f),\ S_k(z) = f\left(S_{k-1}\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right).$$

Schließlich definiert man $S\colon \mathbb{C} \to D(f)$ durch $S(z) = S_k(z)$, wobei k mit $|\lambda|^k r > |z|$ gewählt wird. Leicht sieht man dann, dass S „wohldefiniert" ist und die gewünschten Eigenschaften hat. □

Beispiele. 1. $f(z) = z^2$, $z_0 = 1$, $\lambda = 2$, $S(z) = e^z$.

2. $f(z) = 2z^2 - 1$, $z_0 = 1$, $\lambda = 4$. Eine Lösung der Gleichung $S(2z) = f(S(z))$ mit $S(0) = z_0$ ist durch $S(z) = \cos z$ gegeben. Es gilt aber $2 \neq \lambda$, und es ist $S'(0) = 0$. Die durch $S'(0) = 1$ normierte Lösung ist durch

$$S(z) = \cos(i\sqrt{2z}) = \cosh \sqrt{2z}$$

gegeben. Diese erfüllt

$$S(4z) = f(S(z)).$$

Bemerkung. Ist z_0 anziehender (aber nicht superattraktiver) Fixpunkt, so kann man obige Idee benutzen, um $\phi := S^{-1}$ auf $A^*(z_0)$ fortzusetzen.

Wir werden (mit Satz 6.1) zeigen, dass Einzugsbereiche anziehender Fixpunkte Singularitäten der Umkehrfunktion enthalten. Zur Klärung des Begriffs der Singularität benötigen wir den Begriff der analytischen Fortsetzung.

Exkurs über analytische Fortsetzung. Sei $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph (oder holomorph), $H \supset G$ Gebiet mit $H \neq G$ und $F\colon H \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph (bzw. holomorph) mit $F|_G = f$. Dann heißt F *meromorphe (bzw. holomorphe) Fortsetzung* von f.

Sei $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to G$ glatte, injektive Kurve mit $\gamma(\alpha) \in G$. Es gebe ein Gebiet H mit $H \supset \gamma([\alpha, \beta])$ und eine meromorphe Funktion $F\colon H \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $F(z) = f(z)$ für alle z aus einer Umgebung von $\gamma(\alpha)$.

Dann sagen wir, dass f entlang γ meromorph (bzw. holomorph) fortsetzbar ist, und nennen F meromorphe (bzw. holomorphe) Fortsetzung längs γ. Allgemeiner definiert man dies für nicht notwendigerweise injektive Kurven γ, indem man verlangt, dass $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ und Umgebungen U_j von $\gamma(t_j)$ existieren, so dass $\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ injektiv und mit $f_0 := f$ für $j = 1, \ldots, n$ eine Fortsetzung $f_j|_{U_j}$ von f_{j-1} längs γ_j existiert.

Beispiel. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 1\} = D(1,1)$ und

$$f\colon G \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \log z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, z^k.$$

Weiter sei

$$H_1 = \left\{re^{i\theta}\colon r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right\},\ H_2 = \left\{re^{i\theta}\colon r > 0,\ -\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$

und für $j \in \{1,2\}$

$$F_j\colon H_j \to \mathbb{C},\ F_j(re^{i\theta}) = \log r + i\theta.$$

Dann ist F_1 Fortsetzung von f längs $\gamma_1\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) = e^{it}$, und F_2 ist Fortsetzung von f längs $\gamma_2\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_2(t) = e^{-it}$. Es gilt aber $F_1(-1) = i\pi \neq F_2(-1) = -i\pi$.

Wir betrachten nun eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

von Konvergenzradius r, wobei $0 < r < \infty$. Durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

wird dann eine holomorphe Funktion $f\colon D(z_0,r) \to \mathbb{C}$ definiert, die nicht in eine größere Kreisscheibe $D(z_0,R)$, $R > r$, holomorph fortsetzbar ist. Damit existiert $z_1 \in \partial D(z_0,r)$, so dass f nicht längs der Strecke von z_0 nach z_1 holomorph fortsetzbar ist. So ein Wert z_1 heißt auch *Singularität* von f.

Es folgt: *Ist U Gebiet, $z_0 \in U \subset D(z_0,r)$ und ist $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und für jedes $z \in D(z_0,r)$ längs der Strecke von z_0 nach z holomorph fortsetzbar, so existiert eine holomorphe Funktion $F\colon D(z_0,r) \to \mathbb{C}$ mit $F|_U = f$.*

Zum Beweis dieser Behauptung definiert man F einfach durch die Potenzreihenentwicklung von f um z_0.

Mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes lässt sich obiges Resultat auf einfach zuammenhängende Gebiete übertragen und man erhält den folgenden Satz 6.3. Wir verzichten hier auf die Details dieses Arguments.

Satz 6.3 (Monodromiesatz)**.** *Sei U Gebiet, G einfach zusammenhängendes Gebiet, $U \subset G$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei f holomorph fortsetzbar längs jeder Kurve in G. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ mit $F|_U = f$.*

Sei nun $f\colon G \to H$ holomorph (bzw. meromorph). Ist $U \subset H$ Gebiet und $\varphi\colon U \to G$ holomorph (bzw. meromorph) mit $f \circ \varphi = \mathrm{id}_U$, so heißt φ *holomorpher (bzw. meromorpher) Zweig der Umkehrfunktion f^{-1}* von f.

Definition 6.1. Seien $G, H \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiete und sei $f\colon G \to H$ meromorph. Ein Punkt $w \in H$ heißt *Singularität von f^{-1}*, wenn es eine glatte Kurve $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to H$ mit Endpunkt w (also $\gamma(\beta) = w$) und ein Gebiet U mit $\gamma(\alpha) \in U \subset H$ existiert, so dass in U ein meromorpher Zweig φ von f^{-1} existiert, der für jedes $t \in [\alpha,\beta)$ längs $\gamma|_{[\alpha,t]}$ meromorph fortgesetzt werden kann, aber nicht längs γ.

Die Menge der Singularitäten von f^{-1} bezeichnen wir mit $\mathrm{sing}(f^{-1})$.

Beispiele. 1. Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2$. Dann ist 0 Singularität von f^{-1}, denn sei

$$\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C},\ \gamma(t)=1-t,\ U=\{z\colon \text{Re } z>0\}$$

und φ Hauptwert der Wurzel, also $\varphi(re^{i\theta})=\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

Dann gilt $\varphi(\gamma(t))\to 0$ für $t\to 1$. Hätte φ eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ in eine Umgebung von $\gamma(1)=0$, so würde $\tilde{\varphi}(0)=0$ gelten. Außerdem gilt $f(\tilde{\varphi}(z))=z$. Damit wäre f in einer Umgebung von $\tilde{\varphi}(0)=0$ injektiv. Das ist ein Widerspruch, da $f'(0)=0$.

2. Sei $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^z$. Dann ist 0 wieder Singularität von f^{-1}, denn wegen $f(z)\neq 0$ kann $f(\tilde{\varphi}(z))=z$ in keiner Umgebung von 0 gelten. Mit γ wie oben gilt $\varphi(\gamma(t))=\log\gamma(t)=\log(1-t)\to-\infty$ für $t\to 1$.

Seien f,G,H,w,U,φ und γ wie in Definition 6.1. Für $t\in[\alpha,\beta)$ sei φ_t die in einer Umgebung U_t von $\gamma(t)$ definierte Funktion, die man durch Fortsetzung von φ längs $\gamma|_{[\alpha,t]}$ enthält. Dann gilt $f(\varphi_t(z))=z$ für alle $z\in U_t$. Mit $\sigma(t):=\varphi_t(\gamma(t))$ folgt insbesondere $f(\sigma(t))=\gamma(t)$.

Satz 6.4. *Seien $G,H\subset\widehat{\mathbb{C}}$ Gebiete und $f\colon G\to H$ meromorph. Sei w Singularität von f^{-1}, mit γ wie in Definition* 6.1 *und $\sigma\colon[\alpha,\beta)\to G$, $\sigma(t)=\varphi_t(\gamma(t))$ wie oben.*

Dann gilt einer der beiden folgenden Fälle:

(i) *Es existiert $\zeta\in G$ mit $\lim_{t\to\beta}\sigma(t)=\zeta$. Darüberhinaus gilt $f(\zeta)=w$ und f ist in keiner Umgebung von ζ injektiv.*

(ii) *Es gilt $\lim_{t\to\beta}\operatorname{dist}(\sigma(t),\partial G)=0$.*

Beweisskizze. Sei

$$A:=\bigcap_{s\in[\alpha,\beta)}\overline{\{\sigma(t)\colon s\leq t\leq\beta\}}.$$

Dann ist A abgeschlossen, zusammenhängend und nicht leer.

Fall 1. Es gilt $A\cap G=\emptyset$. Dann folgt $A\subset\partial G$ und damit (ii).

Fall 2. Es gilt $A\cap G\neq\emptyset$. Dann folgt $f(A\cap G)=\{w\}$ und da A zusammenhängend ist, liefert dies $A=\{\xi\}$ für ein $\xi\in G$ mit $f(\xi)=w$.

Wäre $f|_W$ injektiv für eine Umgebung W von ξ, so wäre dadurch (nach eventueller Verkleinerung von W) eine meromorphe Fortsetzung von φ in w definiert.

Bemerkung. 1. Im Falle (i) heißt w *kritischer Wert* und ξ *kritischer Punkt.* Im Falle $\xi,w\in\mathbb{C}$ gilt $f'(\xi)=0$. (Im Falle $w=\infty$ ist ξ mehrfacher Pol.) Man nennt w auch *algebraische Singularität.*

2. Wir sind an den Fällen $G=\widehat{\mathbb{C}}$ (f rational) und $G=\mathbb{C}$ (f ganz) interessiert. Im Falle $G=\widehat{\mathbb{C}}$ ist $\partial G=\emptyset$ und damit tritt Fall (ii) nicht auf. Im Falle $G=\mathbb{C}$ gilt $\partial G=\{\infty\}$ und Bedingung (ii) erhält die Form $\lim_{t\to\beta}\sigma(t)=\infty$. Es gilt also $\sigma(t)\to\infty$ und $f(\sigma(t))\to w$ für $t\to\beta$. Man nennt w in diesem Fall *asymptotischen Wert.* Die Kurve σ bezeichnet man auch als *asymptotischen Weg.*

Für einen anziehenden periodischen Punkt z_0 hatten wir mit $A^*(z_0)$ die Komponente von F bezeichnet, die z_0 enthält.

Satz 6.5. *Sei f ganz oder rational und sei z_0 anziehender periodischer Punkt der Periode p von f. Dann enthält*

$$A:=\bigcup_{j=0}^{p-1}A^*(f^j(z_0))$$

eine Singularität w von f^{-1}.

Genauer enthält A sogar eine Singularität von $(f|_A)^{-1}$. Ist z_0 nicht superattraktiv, so kann man w mit $w\notin O^-(z_0)$ wählen.

Beweis. Wegen (siehe Übung)

$$\operatorname{sing}((f^p)^{-1}) \subset \bigcup_{j=0}^{p-1} f^j(\operatorname{sing}(f^{-1}))$$

reicht es, den Fall $p = 1$ zu betrachten.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$ und $\infty \in J$ und damit $\infty \notin A^*(0)$. Gilt $f'(0) = 0$, so ist 0 kritischer Punkt und kritischer Wert, also $0 \in \operatorname{sing}(f^{-1})$ und auch $0 \in \operatorname{sing}((f|_A)^{-1})$.

Mit $\lambda := f'(0)$ können wir also $0 < |\lambda| < 1$ annehmen. Sei S gemäß Satz 6.1, also S holomorph in einer Umgebung von 0, $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$ und $S(\lambda z) = f(S(z))$.

Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von S um 0. Damit hat S eine holomorphe Fortsetzung in $D(0, R)$, die wir wieder mit S bezeichnen. Wegen

$$S(\lambda^n z) = f^n(S(z))$$

folgt

$$S(D(0, R)) \subset A^*(0).$$

Hieraus folgt wegen $|J| = \infty$ und dem Satz von Picard zunächst einmal, dass $R \neq \infty$ gilt. Damit existiert $v \in \partial D(0, R)$, so dass S entlang der Strecke von 0 nach v nicht holomorph fortsetzbar ist.

In einer Umgebung von 0 können wir mit einem holomorphen Zweig φ von f^{-1} die Funktionalgleichung

$$S(\lambda z) = f(S(z))$$

nun in der Form

$$S(z) = \varphi(S(\lambda z))$$

schreiben. Also kann die durch $z \mapsto \varphi(S(\lambda z))$ definierte Funktion nicht entlang der Stecke von 0 nach v holomorph fortgesetzt werden. Für die durch $z \mapsto S(\lambda z)$ definierte Funktion existiert aber so eine Fortsetzung. Es folgt, dass

$$w := S(\lambda v)$$

eine Singularität von f^{-1} ist. Wegen

$$f^n(w) = f^n(S(\lambda v)) = S(\lambda^n \lambda v) = S(\lambda^{n+1} v) \to 0 = S(0) \quad \text{für } n \to \infty$$

folgt wegen der Isoliertheit der Nullstellen von S, dass $f^n(w) \neq 0$ für alle genügend großen n gilt. Damit gilt dies aber auch für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiele. 1. Für $c \in \mathbb{C}$ sei $f_c \colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $f_c(z) = z^2 + c$. (Jedes quadratische Polynom ist zu genau einem f_c konjugiert.) Dann ist ∞ kritischer Punkt und kritischer Wert, wie bei jedem Polynom von Grad ≥ 2. Desweiteren ist 0 kritischer Punkt und c ist der zugehörige kritische Wert. Es gibt keine weiteren Singularitäten von f^{-1}. Es gilt also

$$\operatorname{sing}(f_c^{-1}) = \{c, \infty\}.$$

Nach Satz 6.5 gilt: Hat f_c einen endlichen anziehenden periodischen Punkt z_0 der Periode p, so enthält der zugehörige unmittelbare Einzugsbereich

$$\bigcup_{j=0}^{p-1} A^*(f^j(z_0))$$

den kritischen Wert c und den kritischen Punkt 0. Wir nennen $\{z_0, f(z_0), \ldots, f^{p-1}(z_0)\}$ auch *anziehenden periodischen Zykel*.

Insbesondere folgt aus Satz 6.5 also, dass f_c höchstens einen anziehenden periodischen Zykel in $\mathbb{C}$ hat. Darüberhinaus liefert Satz 6.5 eine Strategie, diesen Zykel numerisch zu finden, falls er existiert.

Wir definieren

$$H := \{c \in \mathbb{C} \colon f_c \text{ hat einen anziehenden periodischen Zykel in } \mathbb{C}\}$$

und

$$M := \{c \in \mathbb{C} \colon f_c^n(0) \not\to \infty\}.$$

Die Menge M heißt *Mandelbrotmenge.*

Ist $c \in H$ und $Z := \{z_0, f(z_0), \ldots, f^{p-1}(z_0)\}$ der zugehörige anziehende periodische Zykel, so gilt

$$0 \in \bigcup_{j=0}^{p-1} A^*(f^j(z_0)),$$

also $\operatorname{dist}(f_c^n(0), Z) \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere folgt $c \in M$. Es gilt also $H \subset M$.

Ein bekanntes offenes Problem ist, ob H das Innere von M ist? (Einfach sieht man, dass H offen und M abgeschlossen ist.)

2. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f_\lambda \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_\lambda(z) = \lambda e^z$. Dann gilt $\operatorname{sing}(f_\lambda^{-1}) = \{0\}$. Wieder hat f_λ also höchstens einen anziehenden periodischen Zykel und man kann (numerisch) feststellen, für welche λ dies der Fall ist.

Die Frage, ob $\{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \colon f_\lambda \text{ hat anziehenden periodischen Punkt}\}$ dicht in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist, ist offen.

Bisher haben wir Fixpunkte mit Multiplikator λ untersucht, wobei $\lambda \neq 0$ und $|\lambda| \neq 1$ gilt. Jetzt untersuchen wir die verbleibenden Fälle.

Zunächst betrachten wir irrational indifferente Fixpunkte, d.h., den Fall

$$\lambda = e^{2\pi i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Sei also

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

holomorph in Umgebung von z_0. Wir betrachten wieder die Funktionalgleichung

$$S(\lambda z) = f(S(z)) \tag{6.3}$$

mit

$$S(z) = z_0 + z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k.$$

Einsetzen der Potenzreihen in die Funktionalgleichung und Koeffizientenvergleich liefert Rekursionsformeln für die b_k. Konvergiert die Reihe für S, so erhält man so eine in einer Umgebung von 0 holomorphe Funktion S mit (6.3). Wir nennen dann den Fixpunkt z_0 *linearisierbar.* Diese Terminologie wird auch für Fixpunkte, die nicht irrational indifferent sind, benutzt. Satz 6.1 besagt dann, dass abstoßende und anziehende aber nicht superattraktive Fixpunkte linearisierbar sind. Der Potenzreihenansatz liefert einen anderen Beweis dafür.

Die Frage, wann ein irrational indifferenter Fixpunkt linearisierbar ist, ist schwierig und hängt von zahlentheoretischen Eigenschaften von α ab. Die wichtigsten Ergebnisse sind folgende:

- Pfeifer 1917, Cremer 1926, 1938: Beispiele nichtlinearisierbarer Funktionen.
- Siegel 1942: Für gewisse α liegt immer Linearisierbarkeit vor.
- Brjuno 1972, Yoccoz 1988, 1995: Charakterisierung dieser α.

Wir beschränken uns auf den folgenden Satz.

Satz 6.6. *Sei f ganz oder rational und z_0 irrational indifferenter Fixpunkt. Dann ist $z_0 \in F$ genau dann, wenn z_0 linearisierbar ist.*

Bemerkung. Entsprechendes gilt natürlich für periodische Punkte.

Beweis. Sei z_0 linearisierbar, etwa $S\colon D(0,r) \to \mathbb{C}$, $S(\lambda z) = f(S(z))$ für $z \in D(0,r)$. Mit $V := S(D(0,r))$ folgt $f(V) \subset V$, also $z_0 \in V \subset F(f)$ falls r klein genug.

Sei nun $z_0 \in F(f)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der f^n existiert $\delta > 0$ mit

$$|f^n(z)| = |f^n(z) - f^n(0)| < 1$$

für $z \in D(0,\delta)$. Sei $\phi_n\colon D(0,\delta) \to \mathbb{C}$,

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j(z)}{\lambda^j}.$$

Dann gilt

$$|\phi_n(z)| \le \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |f^j(z)| < 1$$

für $z \in D(0,\delta)$. Also ist (ϕ_n) normal, d.h., es existiert eine konvergente Teilfolge, etwa

$$\phi_{n_k} \to \phi\colon D(0,\delta) \to \mathbb{C}.$$

Wegen $\phi_n(0) = 0$ und $\phi_n'(0) = 1$ folgt $\phi(0) = 0$ und $\phi'(0) = 1$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\phi_n(f(z)) - \lambda\phi_n(z)| &= \left| \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{j+1}(z)}{\lambda^j} - \lambda \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j(z)}{\lambda^j} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} \left(\frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^n} - \lambda z \right) \right| \\ &\le \frac{1}{n+1}(1+\delta) \end{aligned}$$

für $z \in D(0,\delta)$. Mit $n = n_k \to \infty$ folgt hieraus $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$. Für genügend kleines δ ist $\phi\colon D(0,\delta) \to \phi(D(0,\delta))$ biholomorph, und $S = \phi^{-1}$ erfüllt dann $S(\lambda z) = f(S(z))$. □

Als nächstes betrachten wir superattraktive Fixpunkte, also den Fall $\lambda = 0$.

Satz 6.7. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U Umgebung von z_0, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z_0) = z_0$ und $f'(z_0) = 0$.*

Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $f^{(m)}(z_0) \ne 0$, also

$$f(z) = z_0 + a_m(z - z_0)^m + O((z - z_0)^{m+1})$$

für $z \to z_0$, wobei $a_m \ne 0$. Sei $b_1 \in \mathbb{C}$ mit $b_1^{m-1} = a_m$.

Dann existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 mit $f(V) \subset V$ und eine holomorphe Funktion $\phi\colon V \to \mathbb{C}$ mit $\phi(z_0) = 0$ und $\phi'(z_0) = b_1$, also

$$\phi(z) = b_1(z - z_0) + O((z - z_0)^2)$$

für $z \to z_0$, so dass

$$\phi(f(z)) = \phi(z)^m \tag{6.4}$$

für $z \in V$. Für ein gegebenes Gebiet V existiert höchstens ein solches ϕ.

Bemerkung. 1. Satz 6.7 und die Funktionalgleichung (6.4) dort werden nach L. E. Böttcher (1906) benannt.

2. Sind $b_1, \tilde{b_1}$ mit $b_1^{m-1} = \tilde{b_1}^{m-1} = a_m$, und $\phi, \tilde{\phi}$ gemäß Satz 6.7, so gilt $\tilde{b_1} = \omega b_1$ und $\tilde{\phi} = \omega\phi$ für ein ω mit $\omega^{m-1} = 1$.

3. Sei p Polynom von Grad m oder – allgemeiner – sei p meromorph in einer Umgebung von ∞ mit $p(z) \sim c_m z^m$ für $z \to \infty$, wobei $c_m \neq 0$ und $m \geq 2$. Dann ist ∞ superattraktiver Fixpunkt und für $f(z) = 1/p(1/z)$ gilt

$$f(z) = a_m z^m + O(z^{m+1})$$

mit $a_m = 1/c_m$. Sei ϕ gemäß Satz 6.7 und $\psi(z) = 1/\phi(1/z)$. Dann ist ψ meromorph in einer Umgebung von ∞, mit

$$\psi(z) = d_1 z + O(1), \quad z \to \infty,$$

wobei $d_1 = 1/b_1$, also $d_1^{m-1} = c_m$, und es gilt

$$\psi(p(z)) = \psi(z)^m.$$

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 6.7 bemerken wir zunächst, dass für $\alpha > 0$ und $w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ durch

$$\log w = \log|w| + i \arg w, \quad -\pi < \arg w < \pi$$

der Hauptwert des Logarithmus und durch

$$w^\alpha = \exp(\alpha \log w)$$

der Hauptwert der Potenz gegeben ist.

Hilfssatz 6.1. *Für $v \in D\left(0, \frac{1}{2}\right)$ und $0 < \alpha < 1$ gilt $|(1+v)^\alpha - 1| \leq 2\alpha|v| \leq \alpha$.*

Beweis. Sei γ die gerade Verbindungsstrecke von 1 nach $1 + v$. Wegen

$$\frac{d}{dw}(w^\alpha) = \frac{\alpha w^\alpha}{w}$$

gilt dann

$$|(1+v)^\alpha - 1| = \left| \int_\gamma \frac{\alpha w^\alpha}{w} dw \right| \leq \alpha|v| \max_{w \in \text{spur}(\gamma)} |w|^{\alpha-1} \leq \alpha|v| \max_{w \in \text{spur}(\gamma)} |w|^{-1} \leq \alpha \frac{|v|}{1-|v|},$$

woraus wegen $|v| \leq \frac{1}{2}$ dann die Behauptung folgt. □

Beweis von Satz 6.7. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$. Weiter kann man $a_m = b_1 = 1$ annehmen, da dies durch Konjugation mit $z \mapsto b_1 z$ erreicht werden kann.

Wir zeigen zunächst die Existenz von ϕ. Die Funktion f hat die Darstellung

$$f(z) = z^m + O(z^{m+1}) = z^m(1 + v(z))$$

wobei v holomorph in einer Umgebung von 0 und $v(0) = 0$ ist. Es folgt

$$f^n(z) = f(f^{n-1}(z)) = \left(f^{n-1}(z)\right)^m \left(1 + v(f^{n-1}(z))\right). \tag{6.5}$$

Wir werden zeigen, dass für genügend kleines $\delta > 0$ eine Funktion $\phi_n \colon D(0, \delta) \to \mathbb{C}$ mit

$$\phi_n(z)^{m^n} = f^n(z) \quad \text{und} \quad \phi_n(z) = z + O(z^2)$$

für $z \to 0$ existiert. Diese erfüllt dann

$$\phi_n(z) = \phi_{n-1}(z)(1 + v(f^{n-1}(z)))^{1/m^n} \tag{6.6}$$

und

$$\phi_n(z)^m = \phi_{n-1}(f(z)). \tag{6.7}$$

Schließlich zeigen wir, dass (ϕ_n) lokal gleichmäßig konvergiert. Dann leistet

$$\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$$

das Verlangte.

Dazu wählen wir δ mit $0 < \delta < 1$, so dass für $z \in D(0,\delta)$ die Ungleichungen $|v(z)| < \frac{1}{2}$ und $|f(z)| < \delta$ sowie $f(z) \neq 0$ für $z \neq 0$ gelten.

Es folgt aus (6.5), dass $f^n(z) \neq 0$ für $z \in D(0,\delta)\backslash\{0\}$. Aus (6.5) folgt auch, dass

$$f^n(z) = z^{m^n} + O(z^{m^n+1}).$$

Damit ist die durch

$$g_n(z) = \begin{cases} \dfrac{f^n(z)}{z^{m^n}}, & \text{wenn } z \neq 0, \\ 1, & \text{wenn } z = 0, \end{cases}$$

definierte Funktion $g_n\colon D(0,\delta) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph. Es existiert damit eine holomorphe Funktion $h_n\colon D(0,\delta) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $h_n(0) = 1$ und

$$h_n(z)^{m^n} = g_n(z).$$

Die durch

$$\phi_n(z) = z\, h_n(z)$$

definierte Funktion $\phi_n\colon D(0,\delta) \to \mathbb{C}$ ist dann ebenfalls holomorph. Wegen

$$\phi_n(z)^{m^n} = f^n(z) = (f^{n-1}(z))^m(1 + v(f^{n-1}(z))) = \phi_{n-1}(z)^{m^n}(1 + v(f^{n-1}(z)))$$

folgt, dass sich die rechte und linke Seite von (6.6) nur um eine multiplikative Konstante c mit $c^{m^n} = 1$ unterscheiden können. Die Entwicklung um 0 zeigt, dass $c = 1$ gilt. Ebenso erhält man

$$(\phi_n(z)^m)^{m^{n-1}} = \phi_n(z)^{m^n} = f^n(z) = f^{n-1}(f(z)) = [\phi_{n-1}(f(z))]^{m^{n-1}},$$

und hieraus folgt dann (6.7).

Schließlich folgt mit Hilfssatz 6.1, dass

$$|\phi_n(z) - \phi_{n-1}(z)| = \left|\phi_{n-1}(z)\left(\left(1 + v(f^{n-1}(z))\right)^{1/m^n} - 1\right)\right| \leq |\phi_{n-1}(z)|\frac{1}{m^n} \leq \frac{1}{m^n}.$$

Hieraus folgt wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^n} < \infty$$

leicht, dass (ϕ_n) Cauchyfolge (und damit konvergent) ist.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, $\tilde{\phi}$ wäre eine weitere Funktion mit $\tilde{\phi}(0) = 0$, $\tilde{\phi}'(0) = 1$ und

$$\tilde{\phi}(f(z)) = \tilde{\phi}(z)^m.$$

Dann existieren $\tilde{\phi}^{-1}$ und $\psi := \phi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ in einer Umgebung von 0. Es gilt dann

$$f(\tilde{\phi}^{-1}(z)) = \tilde{\phi}^{-1}(z^m)$$

und

$$\psi(z^m) = \phi(\tilde{\phi}^{-1}(z^m)) = \phi(f(\tilde{\phi}^{-1}(z)) = \phi(\tilde{\phi}^{-1}(z))^m = \psi(z)^m.$$

Hieraus folgt leicht, dass $\psi(z) = z$ für z nahe 0, also $\phi(z) = \tilde{\phi}(z)$ für z aus einer Umgebung von 0. $\square$

Schließlich betrachten wir rational indifferente Fixpunkte. Sei also z_0 Fixpunkt von f mit Multiplikator $\lambda = e^{2\pi i p/q}$, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p < q$. Dann ist z_0 Fixpunkt von f^q mit Multiplikator $\lambda^q = 1$. Es reicht also, den Fall $\lambda = 1$ zu betrachten.

Satz 6.8. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U Umgebung von z_0, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(z_0) = z_0$ und $f'(z_0) = 1$. Seien $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit*

$$\begin{aligned} f(z) &= z_0 + (z - z_0) + a(z - z_0)^{m+1} + O((z - z_0)^{m+2}) \\ &= z + a(z - z_0)^{m+1} + O((z - z_0)^{m+2}) \end{aligned}$$

für $z \to z_0$.

Für $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ sei

$$\theta_k = -\frac{\arg a}{m} + \frac{2\pi k}{m}.$$

Dann existiert für jedes $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet U_k mit folgenden Eigenschaften:

(i) *$U_k \subset \{z \in \mathbb{C}\colon \theta_k < \arg(z - z_0) < \theta_{k+1}\}$;*
(ii) *$z_0 \in \partial U_k$;*
(iii) *∂U_k ist glatt, außer möglicherweise in z_0, und tangential zu den Strahlen $\arg(z-z_0) = \theta_k$ und $\arg(z - z_0) = \theta_{k+1}$ im Punkte z_0, d.h., es gibt eine glatte Kurve $\gamma_k\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_k(0) = \gamma_k(1) = z_0$, $\arg \gamma_k'(0) = \theta_k$, $\arg \gamma_k'(1) = -\theta_{k+1}$ und $\operatorname{spur}(\gamma_k) = \partial U_k$;*
(iv) *$f(U_k) \subset U_k$;*
(v) *$f^n|_{U_k} \to z_0$ für $n \to \infty$.*

Beweisskizze. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$. Sei $k \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$ fest gewählt. Wir definieren

$$\phi\colon \{z \in \mathbb{C}\colon \theta_k < \arg z < \theta_{k+1}\} \to \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$$

durch

$$\phi(z) = -\frac{1}{maz^m}.$$

Dann ist ϕ bijektiv und eine längere Rechnung zeigt, dass die durch

$$g(z) = \phi(f(\phi^{-1}(z))).$$

definierte Funktion g die asymptotische Entwicklung

$$g(z) = z + 1 + O\left(\frac{1}{|z|^{1/m}}\right), \ z \to \infty$$

hat. Für $a, b, c > 0$ geeignet gilt mit

$$G = \{x + iy\colon\ x > a - b|y|^c\}$$

dann, dass

$$g(G) \subset G \quad \text{und} \quad g^n|_G \to \infty$$

gilt. Es folgt dann, dass $U_k := \phi^{-1}(G)$ die verlangten Eigenschaften hat. □

Bemerkung. 1. Seien g und G wie oben, also $g(z) = z + 1 + o(1)$ für $z \to \infty$. Man kann zeigen, dass eine Funktion $A\colon G \to \mathbb{C}$ mit $A(g(z)) = A(z) + 1$ existiert, d.h. A konjugiert $g|_G$ zu $z \mapsto z + 1$.

Die Beweisidee ist, für festes z_0 in G die Funktionen $A_n(z) = g_n(z) - g^n(z_0)$ zu betrachten. Man zeigt, dass die Folge (A_n) konvergiert, etwa $A_n \to A$. Wegen

$$A_n(g(z)) = g^{n+1}(z) - g^n(z_0) = A_{n+1}(z) + g^{n+1}(z_0) - g^n(z_0)$$

folgt mit $g^{n+1}(z_0) - g^n(z_0) \to 1$ dann die Behauptung. Die Gleichung

$$A(g(z)) = A(z) + 1$$

heißt *Abelsche Funktionalgleichung.*

2. Sei f ganz oder rational und z_0 Fixpunkt mit Multiplikator 1. Sei U_k gemäß Satz 6.7. Dann existiert eine Komponente G_k von $F(f)$ mit $G_k \supset U_k$.

Man kann zeigen, dass G_k eine Singularität von f^{-1} enthält. Die Beweisidee ist ähnlich wie bei dem entsprechenden Ergebnis für anziehende Fixpunkte. Mit $B := A^{-1}$ hat die Abelsche Funktionalgleichung die Form

$$g(B(z)) = B(z+1)$$

bzw.

$$B(z) = g^{-1}(B(z+1)).$$

Dies gilt dort, wo A^{-1} und g^{-1} definiert werden können, etwa für Re $z > R$, R groß.

Hätte g^{-1} keine Singularität, so könnte man B auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Dies führt zum Widerspruch, vgl. Beweis zu Satz 6.1.

Wir fassen dies als Satz zusammen.

Satz 6.9. *Sei f ganz oder rational und sei z_0 Fixpunkt mit Multiplikator* 1. *Seien m und $U_0, \ldots, U_{m-1}$ wie in Satz 6.8. Dann existieren Komponenten $V_0, \ldots, V_{m-1}$ von $F(f)$ mit $V_k \supset U_k$ und jedes V_k enthält eine Singularität von f^{-1}, für $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.*

Genauer enthält V_k sogar eine Singularität von $(f|_{V_k})^{-1}$.

Analoge Resultate gelten für periodische Punkte mit Multiplikator $\lambda = e^{2\pi i p/q}$, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq p < q$.

7. Die Komponenten der Fatoumenge

Definition 7.1. Sei f ganz oder rational und sei U Komponente von $F(f)$. Dann heißt U *periodisch*, falls $p \in \mathbb{N}$ mit $f^p(U) \subset U$ existiert. Das kleinste p mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von U. Im Falle $p = 1$ heißt U *invariant*.

Weiter heißt U *präperiodisch*, falls $n \geq 0$ existiert, so dass $f^n(U) \subset V$ für eine periodische Komponente V. Eine nicht präperiodische Komponente von $F(f)$ heißt *wandernd*.

Bemerkung. Ist U Komponente von $F(f)$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt $f^n(U) \subset U_n$ für eine Komponente U_n von $F(f)$. Es kann dabei durchaus $f^n(U)$ echte Teilmenge von U_n sein. Zum Beispiel ist für $0 < \lambda < 1/e$ und $f(z) = \lambda(e^z - 1)$ der Punkt 0 ein anziehender Fixpunkt von f. Der unmittelbare Einzugsbereich U von 0 ist eine invariante Komponente von $F(f)$, die die Singularität $-\lambda$ der Umkehrfunktion enthält. Andererseits gilt $f(z) \neq -\lambda$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und damit insbesondere auch für alle $z \in U$. Es folgt, dass $-\lambda \in U \backslash f(U) = U_1 \backslash f(U)$.

Für rationales f gilt aber immer $f^n(U) = U_n$. Weiter kann man zeigen, dass für ganzes f immer $|U_n \backslash f^n(U)| \leq 1$ gilt.

Es gilt:

- U ist periodisch, falls $p \in \mathbb{N}$ mit $U_n = U$ existiert;
- U ist präperiodisch, falls $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ und $U_m = U_n$ existieren;
- U ist wandernd, falls $U_m \neq U_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$.

Definition 7.2. Sei f ganz transzendent oder rational und sei U invariante Komponente von $F(f)$. Dann heißt U

(i) *Böttchergebiet*, falls U einen superattraktiven Fixpunkt enthält,
(ii) *Schrödergebiet*, falls U einen anziehenden Fixpunkt enthält, der nicht superattraktiv ist,
(iii) *Leaugebiet* (oder *parabolisches Gebiet*), falls ein Fixpunkt $z_0 \in \partial U$ mit Multiplikator 1 existiert, so dass $f^n|_U \to z_0$ für $n \to \infty$,
(iv) *Bakergebiet*, falls f ganz transzendent und $f^n|_U \to \infty$ für $n \to \infty$,
(v) *Rotationsgebiet* (oder *singuläres Gebiet*), falls $f|_U \colon U \to U$ bijektiv ist und eine Folge $(n_k) \in \mathbb{N}$ mit $f^{n_k}|_U \to id_U$ existiert.

Ist U vom Typ (i) oder (ii), so heißt U auch *Attraktionsgebiet* (oder *unmittelbarer Einzugsbereich*). Ist U periodisch mit Periode p, so wird U gemäß (i)-(v) benannt, wenn dies mit f^p an Stelle von f gilt.

Bemerkung. Umgekehrt erhält man sofort Beispiele von Böttcher-, Schröder- und Leaugebieten durch superattraktive, anziehende bzw. rational indifferente Fixpunkte.

Ein Beispiel eines Bakergebietes ist durch die ganze Funktion $f(z) = e^{-z} + z + 1$ gegeben. Für $H = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ gilt $f(H) \subset H$ und $f^n|_H \to \infty$. Damit existiert ein Bakergebiet U mit $U \supset H$.

Definitionsgemäß gibt es Bakergebiete nur für ganze transzendente Funktionen.

Beispiele von Rotationsgebieten erhält man durch linearisierbare irrational indifferente Fixpunkte. Dass solche Fixpunkte tatsächlich existieren, ist aber schwieriger einzusehen; vgl. die Diskussion in §6.

Satz 7.1. *Sei f ganz oder rational und sei U periodische Komponente von $F(f)$. Dann ist U von einem der Typen* (i)–(v) *aus Definition 7.2.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei U invariant. Wesentliche Beweisteile wurden schon in Satz 4.1 erbracht. Dort wurde gezeigt, dass genau einer der folgenden drei Fälle gilt:

(a) Es existiert ein anziehender Fixpunkt $a \in U$ mit $f(a) = a$ und $f^n|_U \to a$ für $n \to \infty$;
(b) $\operatorname{dist}(f^n|_U, \partial U) \to 0$ für $n \to \infty$,
(c) $f|_U\colon U \to U$ ist bijektiv und es existiert eine Folge (n_k) mit $f^{n_k}|_U \to \mathrm{id}_U$ für $k \to \infty$.

Im Fall (a) ist U ein Böttcher- oder Schrödergebiet, je nachdem ob a superattraktiv ist oder nicht. Im Fall (c) ist U ein singuläres Gebiet. Es bleibt zu zeigen, dass U im Fall (b) ein Leau- oder Bakergebiet ist. Wir nehmen also an, dass (b) gilt.

Es sei an den Beweis von Satz 4.1 erinnert. Dort wird die Menge L aller Funktionen $\phi\colon U \to \mathbb{C}$ betrachtet, für die eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ mit $n_k \to \infty$ und $f^{n_k}|_U \to \phi$ existiert. Das Argument dort zeigt, dass (c) gilt, falls L eine nicht konstante Funktion enthält. In diesem Fall ist U also ein singuläres Gebiet.

Wir können daher annehmen, dass L nur aus Konstanten besteht. Wir bezeichnen die Menge dieser Konstanten wieder mit L. Sei nun $z_0 \in U$ und γ eine kompakte, zusammenhängende Teilmenge von U, welche z_0 und $f(z_0)$ enthält, etwa die Spur einer z_0 und $f(z_0)$ verbindenden Kurve in U. Dann gilt

$$L = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k\geq n} f^k(\gamma)}.$$

Hieraus folgt, dass L eine nicht leere, kompakte, zusammenhängende Teilmenge von $\overline{U}$ ist. Da wir Fall (b) annehmen, gilt sogar $L \subset \partial U$.

Für rationales f ist $D(f) = \widehat{\mathbb{C}}$ und damit $L \subset D(f)$. Gilt also $L \cap D(f) = \emptyset$, so ist f ganz transzendent und $L \subset \widehat{\mathbb{C}} \backslash D(f) = \widehat{\mathbb{C}} \backslash \mathbb{C}$, also $L = \{\infty\}$. Damit ist U Bakergebiet.

Sei also $L \cap D(f) \neq \emptyset$. Für $a \in L \cap D(f)$ existiert eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ mit $n_k \to \infty$ und $f^{n_k}|_U \to a$, insbesondere also $f^{n_k}(z_0) \to a$ und $f^{n_k}(f(z_0)) = f(f^{n_k}(z_0)) \to a$. Da f stetig in a ist, folgt $f(a) = a$. Also besteht $L \cap D(f)$ nur aus Fixpunkten von f und ist folglich eine diskrete Teilmenge von $D(f)$. Da andererseits L zusammenhängend ist, folgt $L = \{a\}$ für einen Fixpunkt a von f. Es gilt also $f^n|_U \to a \in \partial U$.

Es bleibt zu zeigen, dass a Multiplikator 1 hat. Dazu können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a = 0$ gilt. Sei $\lambda = f'(0)$ der Multiplikator. Dann gilt $|\lambda| \geq 1$, da sonst 0 anziehender Fixpunkt und U Böttcher- oder Schrödergebiet wäre. Andererseits ist nicht schwer zu sehen, dass aus $f^n|_U \to 0$ auch $|\lambda| \leq 1$ folgt. Also gilt $|\lambda| = 1$.

Damit existiert $\delta > 0$, so dass $f|_{D(0,\delta)}$ injektiv ist. Sei $v \in U$ und sei V ein Gebiet mit $\overline{V} \subset U$ und $\{v, f(v)\} \subset V$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f^n(V) \subset D(0,\delta)$ für $n \geq n_0$. Sei

$$W = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} f^n(V).$$

Dann ist W ein Gebiet und es gilt $f(W) \subset W$ und $f^n|_W \to 0$. Außerdem gilt $W \subset D(0,\delta)$, so dass $f|_W$ injektiv ist. Für festes $w \in W$ betrachten wir nun die Funktionen $\phi_n \colon W \to \mathbb{C}$, $\phi_n(z) = f^n(z)/f^n(w)$. Dann sind die ϕ_n injektiv und es gilt $\phi_n(z) \neq 0$ für alle $z \in W$ und $n \in \mathbb{N}$. Nach Übungsaufgabe bilden die ϕ_n eine normale Familie. Also hat (ϕ_n) eine konvergente Teilfolge, etwa $\phi_{n_k} \to \phi$. Wegen $\phi_n(w) = 1$ für alle n folgt $\phi(w) = 1$. Nach Satz von Hurwitz ist ϕ konstant oder injektiv.

Für $z \in W$ gilt nun

$$\lambda = f'(0) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{f(\zeta)}{\zeta} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(f^n(z))}{f^n(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(z)}{f^n(z)}$$

und damit

$$\phi(f(z)) = \lim_{k\to\infty} \frac{f^{n_k}(f(z))}{f^{n_k}(w)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f^{n_k+1}(z)}{f^{n_k}(w)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f^{n_k+1}(z)}{f^{n_k}(z)} \frac{f^{n_k}(z)}{f^{n_k}(w)} = \lambda\phi(z).$$

Ist ϕ nicht konstant, so ist $\phi : W \to \phi(W)$ bijektiv. Für $m \in \mathbb{N}$ und $z \in W$ gilt nun $\phi(f^m(z)) = \lambda^m \phi(z)$, insbesondere also $\phi(f^m(w)) = \lambda^m \phi(w) = \lambda^m$ und damit $\lambda^m \in \phi(W)$. Wegen $|\lambda| = 1$ existiert eine Folge (m_k) mit $m_k \to \infty$ und $\lambda^{m_k} \to 1$. Es folgt

$$f^{m_k}(w) = \phi^{-1}(\lambda^{m_k}) \to \phi^{-1}(1) = w.$$

Andererseits gilt $f^{m_k}(w) \to 0$ da $w \in U$. Das ist ein Widerspruch. Also ist ϕ konstant, wegen $\phi(w) = 1$ also $\phi(z) \equiv 1$. Aus $\phi(f(z)) = \lambda\phi(z)$ folgt jetzt sofort, dass $\lambda = 1$. □

Definition 7.3. Sei f ganz oder rational und sei U invariante Komponente von $F(f)$. Es gebe eine bijektive holomorphe Funktion $\phi \colon U \to V$ mit einer Kreisscheibe $V = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ oder einem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \colon r < |z| < R\}$ sowie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass

$$\phi(f(z)) = e^{2\pi i\alpha}\phi(z)$$

für $z \in U$. Ist V Kreisscheibe, so heißt U *Siegelscheibe*. Ist V Kreisring, so heißt U *Hermanring*.

Ist U periodische Komponente der Periode p von $F(f)$, so heißt U Siegelscheibe bzw. Hermanring, wenn obiges mit f^p an Stelle von f gilt.

Bemerkung. Man kann das Gebiet V auch normieren, indem man $R = 1$ fordert. Alternativ kann man im Falle des Kreisrings auch $r = 1$ annehmen.

Ist $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, so existiert eine Folge (n_k) mit $n_k \to \infty$ und $\lambda^{n_k} \to 1$. Es folgt, aus der Gleichung $\phi(f(z)) = e^{2\pi i\alpha}\phi(z) = \lambda\phi(z)$, dass $f^{n_k}(z) = \phi^{-1}(\lambda^{n_k}(\phi(z))) \to z$ für $z \in U$ und $k \to \infty$. Damit sind Siegelscheiben und Hermanringe singuläre Gebiete. Es gilt auch die Umkehrung.

Satz 7.2. *Jedes singuläre Gebiet ist eine Siegelscheibe oder ein Hermanring.*

Wir verzichten hier auf den Beweis.

Definition 7.4. Sei f ganz oder rational. Dann heißt

$$P(f) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\operatorname{sing}(f^{-1}))}$$

postsinguläre Menge von f.

Satz 7.3. *Sei f ganz oder rational und sei U singuläres Gebiet von f. Dann gilt $\partial U \subset P(f)$.*

Hilfssatz 7.1. *Sei f ganz oder rational und sei $U \subset D(f)$. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von in U definierten, meromorphen Zweigen der Umkehrfunktionen der Iterierten von f, d.h., ist $\phi \in \mathcal{F}$, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \circ \phi = id_U$. Dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Beweis. Da $J(f)$ der Abschluss der Menge der abstoßenden periodischen Punkte ist, hat f unendlich viele periodische Orbits, deren Periode mindestens 3 ist. Ist $a \in U$, so existiert also ein periodischer Orbit $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}\}$ der Periode $p \geq 3$ mit $a \notin Z$. Sei V eine Umgebung von a mit $V \subset U$ und $V \cap Z = \emptyset$. Wegen $f(Z) \subset Z$ gilt dann $\phi(V) \cap Z = \emptyset$ für alle $\phi \in \mathcal{F}$. Damit ist $\{\phi|_V : \phi \in \mathcal{F}\}$ nach dem Satz von Montel normal. Da Normalität eine lokale Eigenschaft ist, ist damit auch $\mathcal{F}$ normal. ☐

Beweis von Satz 7.3. Es sei $a \in \partial U \backslash P(f)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \in \mathbb{C}$. Dann existieren $\delta, \varepsilon > 0$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $D(a,\varepsilon) \cap P(f) = \emptyset$ und $\overline{D(b,\delta)} \subset D(a,\varepsilon) \cap U$. Nun existiert eine Folge (m_k) mit $m_k \to \infty$ und $f^{m_k}|_U \to id_U$. Für genügend große k folgt $f^{m_k}(D(b,\delta)) \subset D(a,\varepsilon)$. Die Umkehrfunktion von $f^{m_k}|_{D(b,\delta)} : D(b,\delta) \to f^{m_k}(D(b,\delta))$ kann wegen $D(a,\varepsilon) \cap P(f) = \emptyset$ zu einer meromorphen Funktion $\phi_k : D(a,\varepsilon) \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden. Nach Hilfssatz 7.1 bilden die ϕ_k eine normale Familie. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass (ϕ_k) konvergiert, etwa $\phi_k \to \phi$. Wegen $f^{m_k}|_U \to id_U$ und $\phi_k(f^{m_k}(z)) = z$ für $z \in D(b,\delta)$ folgt $\phi(z) = z$ zunächst für $z \in D(b,\delta)$, mit Identitätssatz dann aber auch für $z \in D(a,\varepsilon)$.

Es folgt für genügend große k, dass $\phi_k(D(a,\varepsilon)) \supset \phi(D(a,\varepsilon/2)) = D(a,\varepsilon/2)$. Dies liefert $f^{m_k}(D(a,\varepsilon/2)) = \phi_k^{-1}(D(a,\varepsilon/2)) \subset D(a,\varepsilon)$. Hieraus folgt, dass die f^{m_k} in $D(a,\varepsilon/2)$ normal sind. Nach Übung folgt hieraus, dass $D(a,\varepsilon/2) \subset F(f)$, was ein Widerspruch ist. ☐

Satz 7.4 (Sullivan)**.** *Eine rationale Funktion hat keine wandernden Gebiete.*

Bemerkung. 1. Der Satz wurde von Sullivan 1982 bewiesen. Der Beweis ist relativ aufwändig und kann im Rahmen dieser Vorlesung nicht erbracht werden. Ein wesentliches Hilfsmittel im Beweis sind sogenannte *quasikonforme* Abbildungen. Diese haben sich auch sonst in der neueren Komplexen Dynamik als äußerst nützlich erwiesen. Überhaupt haben der Sullivansche Satz und die im Beweis eingeführten Methoden maßgeblich zur “Wiederbelebung” der Fatou-Juliaschen Theorie beigetragen.

2. Ganze Funktionen können wandernde Gebiete haben. Für das Beispiel $f(z) = z+1+2\pi i-e^z$ wurde das in der Übung gezeigt.

Satz 7.4 vervollständigt das Bild für rationale Funktionen: Jede Komponente der Fatoumenge ist präperiodisch, wird also auf eine periodische Komponente abgebildet, welche dann nach Satz 7.1 ein Böttcher-, Schröder- oder Leaugebiet, eine Siegelscheibe oder ein Hermanring ist. Sei U_0 die entsprechende periodische Komponente, p ihre Periode und $Z = \bigcup_{j=0}^{p-1} U_j$ die Vereinigung der Komponenten des zugehörigen periodischen Zykels. Nach Satz 6.5 und Satz 6.9 gilt in den ersten drei Fällen $Z \cap \operatorname{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$. In den beiden letzten Fällen gilt $\partial Z \subset P(f)$ nach Satz 7.4.

In konkreten Beispielen lässt sich durch Untersuchung der Orbits der kritischen Punkte so oft feststellen, welche Typen von Komponenten der Fatoumenge vorliegen.