

Übungen zu Iteration analytischer Funktionen Serie 9

1. Sei P ein nicht konstantes Polynom und sei $N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$ die zugehörige Newtonsche Iterationsfunktion (vgl. Serie 7). Die Funktion N_P habe einen anziehenden periodischen Punkt z_0 der Periode $m \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{j=0}^{m-1} A^*(N_P^j(z_0))$ eine Nullstelle von P'' enthält.

Hinweis: Satz 5.4.

2. Sei $P(z) = z^3 - 2z + 2$. Zeigen Sie, dass N_P einen superattraktiven Fixpunkt der Periode 2 hat.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 1.

3. Fertigen Sie eine Computergraphik der Einzugsbereiche der Nullstellen sowie des Einzugsbereiches des superattraktiven periodischen Punktes für das Newton-Verfahren zum Polynom P aus Aufgabe 2 an.

4. Sei $P(z) = (z - 1)(z + 1)(z - a)$. Dann gilt $P''\left(\frac{a}{3}\right) = 0$. Nach Aufgabe 1 hat N_P keinen anziehenden periodischen Punkt der Periode größer als 1, falls $\frac{a}{3}$ im Einzugsbereich einer Nullstelle von P liegt. Fertigen Sie eine Graphik an, die zeigt, für welche a der Punkt $\frac{a}{3}$ gegen eine der Nullstellen von P konvergiert. Betrachten Sie insbesondere den durch $|\operatorname{Re} a| \leq 0,2$ und $|\operatorname{Im} a - 4,55| \leq 0,2$ gegebenen Bereich.

Abgabe: 24.01.2005