Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2004/05

Übungen zu Iteration analytischer Funktionen
Serie 7

Notation: Für ein nicht-konstantes Polynom P sei die rationale Funktion $N_P : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}.$$

Das **Newton-Verfahren** besteht aus der Iteration von N_P.

1. Sei P ein Polynom vom Grad $d \geq 2$. Zeigen Sie:
   (i) Eine Nullstelle von P der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ ist ein Fixpunkt von N_P mit Multiplikator $1 - \dfrac{1}{m}$,
   (ii) ∞ ist Fixpunkt von N_P mit Multiplikator $\dfrac{d}{d-1}$,
   (iii) Außer in den Nullstellen von P und in ∞ hat N_P keine Fixpunkte.
2. Sei f eine rationale Funktion mit folgenden Eigenschaften:
   (i) Für alle Fixpunkte in $\mathbb{C}$ ist der Multiplikator von der Form $1 - \frac{1}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$, d.h., ist $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$, so existiert $m(z) \in \mathbb{N}$ mit $f'(z) = 1 - \dfrac{1}{m(z)}$,
   (ii) ∞ ist abstoßender Fixpunkt von f.

   Zeigen Sie, dass ein Polynom P existiert, so dass $f = N_P$.

   Zusatzfrage:
   Was läßt sich über die Form von f sagen, wenn man nur (i) fordert ?
3. Seien P und Q nicht-konstante Polynome. Zeigen Sie, dass N_P und N_Q genau dann zueinander konjugiert sind (d.h. $N_P = T \circ N_Q \circ T^{-1}$ für eine Möbiustransformation T), wenn $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a, b \neq 0$ existieren, so dass $P(z) = aQ(bz + c)$ für $z \in \mathbb{C}$.
4. Sei $P(z) = z^3 - z$. Zeigen Sie, dass N_P zu dem durch $z \mapsto \dfrac{1}{2}(3z - z^3)$ gegebenen Polynom konjugiert ist.

Abgabe: 20.12.2004