Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2004/05

Übungen zu Iteration analytischer Funktionen
Serie 4

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, sei $c \in \mathbb{C}$ und sei F eine Familie in G holomorpher, injektiver Funktionen. Es gelte $f(z) \neq c$ für alle $f \in F$ und alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass F normal ist.

   Hinweis: Eine ganze, injektive Funktion f hat die Form $f(z) = az + b$ wobei $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, sei $N \in \mathbb{N}$ und sei F eine Famile in G holomorpher Funktionen. Weiter gelte, dass die Funktionen in F keine Nullstellen und höchstens N Einsstellen haben (d.h., für $f \in F$ hat $f - 1$ höchsten N Nullstellen), gezählt gemäß Vielfachheit. Zeigen Sie, dass F normal ist.

3. Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiet, sei $\varepsilon > 0$ und sei F eine Famile in G meromorpher Funktionen. Für alle $f \in F$ mögen drei Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ existieren, so dass $\chi(a_j, a_k) \geq \varepsilon$ für $j \neq k$ und so dass $f(z) \neq a_j$ für alle $z \in G$ und alle $j \in \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass F normal ist.

4. Sei f eine nicht konstante ganze Funktion, die keine Translation ist (d.h., f hat nicht die Form $f(z) = z + c$ mit $c \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass $f \circ f$ einen Fixpunkt hat.

   Hinweis: Wenden Sie den Satz von Picard auf die durch

$$z \mapsto \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}$$

   definierte Funktion an.

Abgabe: 22.11.2004