Übungen zu Iteration analytischer Funktionen
Serie 3

1. Zeigen Sie, dass eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation entweder einen oder zwei Fixpunkte hat. Klassifizieren Sie die Möbiustransformationen mit genau einem Fixpunkt bei ∞.

2. Sei F eine normale Familie von in $D(0,1)$ holomorphen Funktionen, so dass $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ für alle $f \in F$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $r > 0$ existiert, so dass $D(0,r) \subset \ f(D(0,1))$ für alle $f \in F$ gilt.

3. Seien $G, H \subset \hat{C}$ Gebiete, sei $g : G \to H$ meromorph und nicht konstant und sei F eine Familie in H meromorpher Funktionen. Zeigen Sie, dass für $z_0 \in G$ die Familie F genau dann normal in $g(z_0)$ ist, wenn $\{f \circ g : f \in F\}$ normal in z_0 ist.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die rationale Funktion $f_n : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definiert durch

   a) $f_(z) = nz^n$

   b) $f_n(z) = \dfrac{z^2}{1 + n^2 z^2}$

   Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \hat{\mathbb{C}}$, wo $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ normal ist.

Abgabe: Mo, 15.11.04

Alternativ zu obigen Aufgaben können Sie auch für die Funktionen $f(z) = z^2 e^z$, $\quad f(z) = z \sin z$ und $f(z) = z - \tan z$ Computergraphiken der Menge $\{z : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = 0\}$ anfertigen. Für $f(z) = z \sin z$ betrachte man auch $\{z : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \frac{\pi}{2}\}$ und für $f(z) = z - \tan z$ auch $\{z : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \pi\}$.