Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2004/05

Übungen zu Iteration analytischer Funktionen
Serie 2

1. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass die durch
$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$
definierte Funktion $T : \mathbb{C} \backslash \{z : cz + d = 0\} \to \mathbb{C}$ zu einer stetigen, bijektiven Funktion $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden kann. Berechnen Sie auch die Umkehrfunktion $T^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Bemerkung: Funktionen T wie in Aufgabe 1 heißen *Möbiustransformationen.*

2. Seien $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $a_j \neq a_k$ und $b_j \neq b_k$ für $j \neq k$. Zeigen Sie, dass genau eine Möbiustransformation T mit $T(a_j) = b_j$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ existiert.

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = \infty$.

Definition: Eine Möbiustransformation der Form $z \mapsto az$ (wobei $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$) heißt *Drehstreckung*, eine der Form $z \mapsto z + b$ (wobei $b \in \mathbb{C}$) *Translation*, und die durch $z \mapsto 1/z$ gegebene Möbiustransformation heißt *Inversion.*

3. Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation als Hintereinanderausführung von Translationen, Drehstreckungen und Inversionen geschrieben werden kann.

4. Sei K die Menge aller Kreise in $\mathbb{C}$ und G die Menge aller mit dem Punkt ∞ vereinigten Geraden in $\mathbb{C}$. Sei T Möbiustransformation. Zeigen Sie, dass $T(K \cup G) \subset K \cup G$.

   Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.

Abgabe: 08.11.2004