Übungen zu Iteration analytischer Funktionen
Serie 10

1. Es seien f, g, Φ holomorph in einer Umgebung von 0 mit den Potenzreihenentwicklungen

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots ,$$
$$g(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots ,$$
$$\Phi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots , \text{ wobei } c_1 \neq 0.$$

Es gelte $f(\Phi(z)) = \Phi(g(z))$ für z nahe 0. Zeigen Sie, dass $\dfrac{a_3}{a_2^2} = \dfrac{b_3}{b_2^2}$.

2. Sei f wie in Aufgabe 1. Sei $F(z) = \dfrac{1}{z - f(z)}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{res}(F, 0) = \dfrac{a_3}{a_2^2}$.
(Dabei bezeichnet $\operatorname{res}(F, 0)$ das Residuum von F an der Polstelle 0.)

3. Sei f ganze, periodische Funktion mit der Periode $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, d.h. $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die ganzen Funktionen g, h seien definiert durch $g(z) = z + f(z)$ und $h(z) = z + \omega + f(z)$. Zeigen Sie:

   (i) $J(f)$ ist vollständig invariant unter der Abbildung $z \mapsto z + \omega$, d.h. für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z \in J(f)$ genau dann, wenn $z + \omega \in J(f)$.

   (ii) $J(g)$ ist vollständig invariant unter der Abbildung $z \mapsto z + \omega$.

   (iii) $J(g) = J(h)$.

4. Die ganze Funktion f sei definiert durch $f(z) = 1 - e^z$ und es seien g, h wie in Aufgabe 3, mit $\omega = 2\pi i$. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion g einen superattraktiven Fixpunkt in $2\pi ik$ hat. Sei $U_k := A^*(2\pi ik)$ der unmittelbare Einzugsbereich von $2\pi ik$ (bzgl. g). Zeigen Sie, dass U_k Komponente von $F(h)$ ist und dass $h(U_k) \subset U_{k+1}$ und $U_k \cap U_{k+1} = \emptyset$ gilt.

Abgabe: 31.01.2005