Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 9

1. Sei P ein nicht konstantes Polynom und sei $N_P(z) = z - \dfrac{P(z)}{P'(z)}$ die zugehörige Newtonsche Iterationsfunktion. Die Funktion N_P habe einen anziehenden periodischen Punkt z_0 der Periode $m \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{m-1} A^*(N_P^j(z_0))$ eine Nullstelle von P'' enthält.

2. Sei $P(z) = z^3 - 2z + 2$. Zeigen Sie, dass N_P einen superattraktiven Fixpunkt der Periode 2 hat.

   Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 1.

3. Sei f rational. Alle kritischen Punkte von f seien präperiodisch, aber nicht periodisch. Zeigen Sie, dass f keine attraktiven periodischen Punkte hat. Zeigen Sie weiter, dass

$$f(z) = i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4$$

   diese Bedingung erfüllt.

4. Sei $a > 0$ und

$$f(z) = \frac{1}{a+1}\, z^2(z+a).$$

   Untersuchen Sie das Verhalten der kritischen Punkte unter Iteration. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $0 < a < 3$, $a = 3$ und $a > 3$. Folgern Sie, dass f außer den superattraktiven Fixpunkten 0 und ∞ keine weiteren attraktiven periodischen Punkte hat.

Jede der obigen Aufgaben kann auch durch eine der beiden folgenden Computergraphik-Aufgaben ersetzt werden:

(a) Sei $P(z) = (z-1)(z+1)(z-a)$. Dann gilt $P''\left(\dfrac{a}{3}\right) = 0$. Nach Aufgabe 1 hat N_P keinen superattraktiven periodischen Punkt der Periode größer als 1, falls $\dfrac{a}{3}$ im Einzugsbereich einer Nullstelle von P liegt. Fertigen Sie eine Graphik an, die zeigt, für welche a der Punkt $\dfrac{a}{3}$ gegen eine der Nullstellen von P konvergiert. Betrachten Sie insbesondere den durch $|\text{Re}\, a| \leq 0{,}2$ und $|\text{Im}\, a - 4{,}55| \leq 0{,}2$ gegebenen Bereich.

(a) Sei f wie in Aufgabe 4. Fertigen Sie Computergraphiken der Einzugsbereiche von 0 und ∞ für $a = 2$, $a = 3$ und $a = 4$ an. (Auch $a = -1{,}3$ und $a = -1{,}5$ und $a = -3$ können betrachtet werden.)

Die Lösungen sind am Dienstag, dem 03.02.2009, in der Vorlesung abzugeben.