Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 8

1. Sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $|\lambda| \neq 1$ und sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,
$$f(z) = \frac{\lambda z}{1+z}.$$
Sei $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,
$$g(z) = \frac{2z}{1+z^2}.$$
Bestimmen Sie für f und g die Lösungen der Schröderschen Funktionalgleichung bezüglich des Fixpunktes im Nullpunkt.

   Hinweis: Konjugieren Sie f zu einer Funktion mit Fixpunktmenge $\{0, \infty\}$, vgl. Aufgabe 1 der Serie 2.

   Erinnern Sie sich bei g an das Additionstheorem der Tangensfunktion.

2. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Es gelte $a_k \geq 0$ für alle k. Zeigen Sie, dass die durch $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ definierte Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ keine holomorphe Fortsetzung in ein Gebiet G mit $\mathbb{D} \cup \{1\} \subset G$ hat.

   Hinweis: Betrachten Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe von f um einen Entwicklungspunkt $x_0 \in (0, 1)$.

3. Für eine rationale oder ganze Funktion sei $C(f)$ die Menge der kritischen Werte von f. Zeigen Sie, dass
$$C(g \circ f) \subset C(g) \cup g(C(f))$$
gilt, wenn f und g beide rational oder beide ganz sind. Zeigen Sie weiter, dass für rationale Funktionen Gleichheit gilt, dass dieses für ganze Funktionen aber im Allgemeinen nicht der Fall ist.

   Zeigen Sie weiterhin, dass für die Menge $A(f)$ der asymptotischen Werte einer ganzen Funktion f analog
$$A(g \circ f) \subset A(g) \cup g(A(f))$$
gilt, falls f und g beide ganz sind.

4. Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definiert durch
$$f(z) = \frac{(z-2)^2}{z^2}.$$
Bestimmen Sie $\operatorname{sing}(f^{-1})$ sowie die Vorwärtsorbits der Punkte aus $\operatorname{sing}(f^{-1})$.

Die Lösungen sind am Mittwoch, dem 28.01.2009, in der Vorlesung abzugeben.