Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2008/09

Übungen zu Iteration analytischer Funktionen
Serie 6

1. Sei f eine rationale oder ganze Funktion. Zeigen Sie, dass die Juliamenge von f einen Punkt enthält, dessen Vorwärtsorbit dicht in $J(f)$ ist, d.h., es existiert $z_0 \in J(f)$ mit $\overline{O^+(z_0)} = J(f)$.

   Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 4.7 der Vorlesung durch Induktion, dass für eine gegebene Folge (U_k) von Gebieten mit $U_k \cap J(f) \neq \emptyset$ eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ und eine Folge (V_l) von Gebieten mit $V_l \cap J(f) \neq \emptyset$ existieren, so dass $f^{n_k}(V_l) \subset U_k$ für $1 \leq k \leq l$ und $\overline{V_{l+1}} \subset V_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$.

Notation: Für ein nicht-konstantes Polynom P sei die rationale Funktion $N_P : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$N_P(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}.$$

Das *Newton-Verfahren* besteht aus der Iteration von N_P.

2. Sei P ein Polynom vom Grad $d \geq 2$. Zeigen Sie:

   (i) Eine m-fache Nullstelle von P ist ein Fixpunkt von N_P mit Multiplikator $1 - \dfrac{1}{m}$,

   (ii) ∞ ist Fixpunkt von N_P mit Multiplikator $\dfrac{d}{d-1}$,

   (iii) Außer in den Nullstellen von P und in ∞ hat N_P keine Fixpunkte.

3. Sei f eine rationale Funktion mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Für alle Fixpunkte in $\mathbb{C}$ ist der Multiplikator von der Form $1 - \frac{1}{m}$ mit $m \in \mathbb{N}$, d.h., ist $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = z$, so existiert $m(z) \in \mathbb{N}$ mit $f'(z) = 1 - \frac{1}{m(z)}$,

   (ii) ∞ ist abstoßender Fixpunkt von f.

   Zeigen Sie, dass ein Polynom P existiert, so dass $f = N_P$.

   Zusatzfrage: Was läßt sich über die Form von f sagen, wenn man nur (i) fordert ?

4. Seien P und Q nicht-konstante Polynome. Zeigen Sie, dass N_P und N_Q genau dann durch eine Möbiustransformation zueinander konjugiert sind (d.h. $N_P = T \circ N_Q \circ T^{-1}$ für eine Möbiustransformation T), wenn $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a, b \neq 0$ existieren, so dass $P(z) = aQ(bz + c)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Alternativ können Sie zu einer dieser Aufgabe auch für ein quadratisches Polynom Ihrer Wahl (welches nicht zum Monom $z \mapsto z^2$ oder dem Tchebychev-Polynom $z \mapsto 2z^2 - 1$ konjugiert ist) eine Computergraphik der Juliamenge durch Rückwärtsiteration (vgl. Satz 4.5 sowie Bemerkung nach Satz 5.2) erzeugen.
Eine weitere Aufgabe können Sie ersetzen, in dem Sie eine Computergraphik der Einzugsbereiche beim Newtonverfahren für das Polynom $p(z) = (z - t)(z - m)(z - j)$ erzeugen, wobei $t \in \{1, \ldots, 31\}$ der Tag, $m \in \{1, \ldots, 12\}$ der Monat und $j \in \{0, \ldots, 99\}$ das Jahr ist, in dem Sie geboren wurden.

Abgabe: 13.01.2009 in der Vorlesung