

Übungen zur Komplexen Dynamik Serie 4

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, sei $N \in \mathbb{N}$ und sei \mathcal{F} eine Familie in G holomorpher Funktionen. Weiter gelte, dass die Funktionen in \mathcal{F} keine Nullstellen und höchstens N Einsstellen haben (d.h., für $f \in \mathcal{F}$ hat $f - 1$ höchstens N Nullstellen), gezählt gemäß Vielfachheit. Zeigen Sie, dass \mathcal{F} normal ist.
2. Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiet, sei $\varepsilon > 0$ und sei \mathcal{F} eine Familie in G meromorpher Funktionen. Für alle $f \in \mathcal{F}$ mögen drei Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ existieren, so dass $\chi(a_j, a_k) \geq \varepsilon$ für $j \neq k$ und so dass $f(z) \neq a_j$ für alle $z \in G$ und alle $j \in \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass \mathcal{F} normal ist.
3. Sei f eine nicht konstante ganze Funktion, die keine Translation ist (d.h., f hat nicht die Form $f(z) = z + c$ mit $c \in \mathbb{C}$). Zeigen Sie, dass $f \circ f$ einen Fixpunkt hat.

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Picard auf die durch

$$z \mapsto \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}$$

definierte Funktion an.

4. Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiet und $f : G \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorph. Sei H Gebiet mit $\overline{H} \subset G$. Es gelte $f(H) \subset H$ und es sei $\{f^n|_H : n \in \mathbb{N}\}$ normal. Weiter sei $f : h \rightarrow H$ nicht bijektiv. Zeigen Sie, dass $a \in \overline{H}$ mit $f(a) = a$ existiert, so dass $f^n \rightarrow a$ lokal gleichmäßig in H ist.

Die Lösungen sind am Dienstag, dem 09.12.2008, in der Vorlesung abzugeben.