Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2008/09

Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 3

1. Zeigen Sie, dass eine injektive ganze Funktion f die Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$, hat.

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, sei $c \in \mathbb{C}$ und sei $\mathcal{F}$ eine Familie in G holomorpher, injektiver Funktionen. Es gelte $f(z) \neq c$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ normal ist.

3. Sei $\mathcal{F}$ die Familie aller injektiven holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, für die $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ normal ist. (Es ist $\mathbb{D} = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.)

4. Sei $\mathcal{F}$ wie in Aufgabe 3 und sei $0 < \varrho < 1$. Zeigen Sie, dass positive Konstanten $A_\varrho, B_\varrho, C_\varrho, D_\varrho$ existieren, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| \leq \varrho$

$$A_\varrho \leq \frac{|f(z)|}{|z|} \leq B_\varrho \quad \text{und} \quad C_\varrho \leq |f'(z)| \leq D_\varrho$$

gilt.

Die Lösungen sind am Dienstag, dem 02.12.2008, in der Vorlesung abzugeben.