Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2008/09

Übungen zur Komplexen Dynamik
Serie 2

1. Die Menge der Fixpunkte eine Funktion f sei mit $\text{Fix}(f)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation entweder einen oder zwei Fixpunkte hat.

   Klassifizieren Sie die Möbiustransformation f mit $\text{Fix}(f) = \{\infty\}$ bzw. $\text{Fix}(f) = \{0, \infty\}$ und geben Sie für diese einen geschlossenen Ausdruck für die Iterierten f^n an.

2. Sei F eine normale Familie von in $D(0,1)$ holomorphen Funktionen, so dass $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ für alle $f \in F$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $r > 0$ existiert, so dass $D(0,r) \subset f(D(0,1))$ für alle $f \in F$ gilt.

3. Seien $G, H \subset \hat{\mathbb{C}}$ Gebiete, sei $g : G \to H$ meromorph und nicht konstant und sei F eine Familie in H meromorpher Funktionen. Zeigen Sie, dass für $z_0 \in G$ die Familie F genau dann normal in $g(z_0)$ ist, wenn $\{f \circ g : f \in F\}$ normal in z_0 ist.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die rationale Funktion $f_n : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definiert durch

   a) $f_n(z) = nz^n$

   b) $f_n(z) = \dfrac{z^2}{1 + n^2 z^2}$

   Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \hat{\mathbb{C}}$, wo $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ normal ist.

Die Lösungen sind am Freitag, dem 21.11.2008, in der Vorlesung abzugeben.

Alternativ zu einer der obigen Aufgaben können Sie auch für eine der Funktionen $f(z) = z^2 e^z$, $f(z) = z \sin z$ und $f(z) = z - \tan z$ eine Computergraphik der Menge $\left\{z : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = 0\right\}$ anfertigen. Für $f(z) = z \sin z$ kann man auch $\left\{z : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \frac{\pi}{2}\right\}$ und für $f(z) = z - \tan z$ auch $\left\{z : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \pi\right\}$ betrachten.