KOMPLEXE DYNAMIK II

WALTER BERGWEILER

Vorlesung an der CAU Kiel
Sommersemester 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Polynome

Ein Polynom f kann sowohl als ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wie auch als rationale Funktion $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ betrachtet werden. Wir werden Polynome als rationale Funktionen ansehen. Wir werden im Folgenden immer annehmen, dass der Grad des Polynoms f mindestens 2 ist. Dann ist ∞ ein superattraktiver Fixpunkt von f. Wir bezeichnen mit

$$A(\infty) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \lim_{n\to\infty} f^n(z) = \infty\}$$

wieder der Einzugsbereich von ∞. Es gilt dann $A(\infty) \subset F(f)$ und $A(\infty)$ ist vollständig invariant.

Definition 1.1. Sei f Polynom. Dann heißt

$$K(f) := \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \not\to \infty\}$$

die *ausgefüllte Juliamenge* von f.

Es existiert ein $R > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset A(\infty)$. Es folgt, dass $K(f) \subset D(0, R)$ und dass

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : |f^n(z)| \leq R \text{ für alle } n\}.$$

Es ist natürlich $K(f) = \widehat{\mathbb{C}} \backslash A(\infty)$ und wegen $A(\infty) \subset F(f)$ gilt $K(f) \subset J(f)$, wobei $J(f) = \widehat{\mathbb{C}} \backslash F(f)$ die Juliamenge von f ist.

Satz 1.1. *Sei f Polynom. Dann ist $A(\infty)$ eine vollständig invariante Komponente von $F(f)$ und es gilt $J(f) = \partial A(\infty) = \partial K(f)$.*

Beweis. Es wurde bereits oben bemerkt, dass $A(\infty) \subset F(f)$ und dass $A(\infty)$ vollständig invariant ist. Außerdem ist bereits bekannt (Iteration I, Satz 4.4), dass $\partial A(\infty) = J(f)$ ist. Da außerdem $\partial X = \partial \widehat{\mathbb{C}} \backslash X$ für jedes $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ gilt, folgt auch $J(f) = \partial K(f)$.

Zu zeigen bleibt lediglich, dass $A(\infty)$ zusammenhängend ist. Sei dazu B eine Komponente von $A(\infty)$ mit $\infty \notin B$. Dann gilt $\partial B \subset \partial A(\infty) = J(f) \subset K(f)$. Es existiert also $R > 0$ mit $|f^n(z)| \leq R$ für $z \in \partial B$ und $n \in \mathbb{N}$.

Nun ist aber B beschränkt und $f^n|_B$ holomorph für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Maximumprinzip folgt

$$\max_{z\in\overline{B}} |f^n(z)| = \max_{z\in\partial B} |f^n(z)|.$$

Es gilt also $|f^n(z)| \leq R$ für alle $z \in B$ und $n \in \mathbb{N}$ und damit folgt $B \subset K(f) = \widehat{\mathbb{C}} \backslash A(\infty)$. Das ist ein Widerspruch.

Es folgt, dass $A(\infty)$ nur eine Komponente hat, also zusammenhängend ist. □

Satz 1.2. *Sei f Polynom und sei U Komponente von $F(f)$ mit $U \neq A(\infty)$. Dann ist U einfach zusammenhängend.*

Beweis. Sei Γ Zyklus (oder Kurve) in U. Sei (n_k) Folge in $\mathbb{N}$ mit $f^{n_k}|_U \to \phi$ für ein $\phi : U \to \mathbb{C}$. Wegen $U \neq A(\infty)$ gilt $\phi(z) \not\equiv \infty$. Für $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ folgt dann

$$n(\Gamma, z) f^{n_k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f^{n_k}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

und damit

$$f^{n_k}(z) \to \frac{1}{n(\Gamma, z)} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

lokal gleichmäßig in $\{z \in \mathbb{C}\backslash sp(\Gamma) : n(\Gamma, z) \neq 0\}$.

Hieraus folgt leicht, dass

$$\{z \in \mathbb{C}\backslash sp(\Gamma) : n(\Gamma, z) \neq 0\} \subset U.$$

Damit ist Γ nullhomolog in U, und da Γ beliebiger Zyklus in U war, folgt, dass U einfach zusammenhängend ist. □

Bemerkung. Wir werden später sehen, dass $A(\infty)$ mehrfach zusammenhängend (in $\widehat{\mathbb{C}}$) sein kann.

Der Klassifikationssatz für periodische Komponenten der Fatoumenge (Teil I, Satz 6.5) vereinfacht sich wie folgt:

Satz 1.3. *Sei f und sei U periodische Komponente von $F(f)$. Dann ist U ein Böttchergebiet, Schrödergebiet, Leangebiet oder eine Siegelscheibe.*

Beweis. Bakergebiete treten nicht auf, da $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Weiter ist $A(\infty)$ Böttchergebiet.

Sei nun $U \neq A(\infty)$. Dann ist U einfach zusammenhängend nach Satz 1.2 und damit kein Hermanring. Die Behauptung folgt mit Satz 6.5 aus Teil I. □

Bemerkung. Nicht nur die Aussage, sondern auch der Beweis des Klassifikationssatzes vereinfacht sich. Dazu sei an die Beweisstruktur erinnert. Wir betrachten die Menge L der Grenzfunktionen von $\{f^n|_U\}$ und unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: L besteht nur aus Konstanten. Dann ist U Böttcher-, Schröder- oder Leangebiet (und falls f ganz ist, kann U auch Bakergebiet sein); vgl. I, Satz 6.1.

Fall 2: L enthält eine nichtkonstante Funktion. Wir haben gezeigt (I, Satz 6.1), dass dann eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ mit $f^{n_k}|_U \to id_U$ existiert. Dies impliziert, dass $f : U \to U$ bijektiv ist. Wir haben nicht gezeigt, dass U dann Siegelscheibe oder Hermanring ist, sondern dieses Ergebnis nur ohne Beweis angegeben (I, Satz 6.4).

Es lässt sich aber für Polynome leicht zeigen, dass in Fall 2 das Gebiet U eine Siegelscheibe ist. Denn U ist einfach zusammenhängend nach Satz 1.2. Damit existiert eine biholomorphe Abbildung $\phi : \mathbb{D} \to U$, wobei $\mathbb{D} = D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist. Wir betrachten $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$. Dann ist $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph. Damit hat g die Form

$$g(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}$$

für ein $a \in \mathbb{D}$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$.

Falls f einen Fixpunkt z_0 in U hat, so kann ϕ so gewählt werden, dass $\phi(0) = z_0$. Es folgt dann $g(0) = 0$, also $a = 0$, und damit $g(z) = \lambda z$. Damit ist U Siegelscheibe, denn es gilt $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, da $f^n \neq id$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Falls f keinen Fixpunkt in U hat, so hat g keinen Fixpunkt in $\mathbb{D}$. Wir betrachten die meromorphe Fortsetzung von g auf $\widehat{\mathbb{C}}$ und bezeichnen diese wieder mit g.

Die Funktion $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ erfüllt dann $g(z) = 1/\overline{g(1/\overline{z})}$, d.h., $g = T^{-1} \circ g \circ T$ mit $T(z) = 1/\overline{z}$. Hieraus folgt, dass g auch keinen Fixpunkt in $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\mathbb{D}$ hat. Damit hat g einen Fixpunkt $z_1 \in \partial\mathbb{D}$. Sei nun M eine Möbiustransformation mit $M(z_1) = \infty$, $M(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $M(\mathbb{D}) = H := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$. Für $z_2, z_3 \in \partial\mathbb{D}$ in geeigneter Orientierung kann man etwa

$$M(z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}$$

wählen.

Wir setzen $h := M \circ g \circ M^{-1}$. Dann gilt $h(\infty) = \infty$ und damit ist h von der Form $h(z) = \alpha z + \beta$. Wegen $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ folgt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ und wegen $h(H) \subset H$ folgt $\alpha > 0$.

Ist $\alpha > 1$, so gilt $h^n|_H \to \infty$. Ist $\alpha = 1$, so gilt $\beta \neq 0$ und man erhält ebenfalls $h^n|_H \to \infty$. Ist $\alpha < 1$, so gilt $h^n|_H \to \frac{\beta}{1-\alpha}$.

In allen Fällen sind alle Grenzfunktionen von $\{h^n|_H\}$ konstant, und damit auch die von $\{g^n|_\mathbb{D}\}$ und $\{f^n|_U\}$. Das ist ein Widerspruch.

In Teil I haben wir den Zusammenhang zwischen anziehenden periodischen Punkten und Singularitäten der Umkehrfunktion untersucht. Für Polynome sind die Singularitäten der Umkehrfunktion die kritischen Werte.

Die kritischen Punkte sind hier ∞ und die Nullstellen von f'. Die kritischen Werte sind also ∞ und die Bilder von f an den Nullstellen von f'. Wir setzen für ein Polynom f

$$\mathrm{Crit}(f) := (f')^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C} : f'(z) = 0\}.$$

Satz 1.4. *Sei f Polynom und sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein anziehender periodischer Punkt der Periode p. Sei*

$$A := \bigcup_{j=0}^{p-1} A^*(f^j(z_0)),$$

d.h., A ist die Vereinigung der Komponenten von $F(f)$, die ein $f^j(z_0)$ enthalten.

Dann gilt

$$A \cap \mathrm{Crit}(f) \neq \emptyset.$$

Bemerkung. Obiger Satz ist, wie bereits bemerkt, ein Spezialfall von I, Satz 5.4. Der Beweis ist in diesem Spezialfall aber wiederum deutlich einfacher: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p = 1$. Nach Satz 1.2 ist A einfach zusammenhängend. Nach Riemannschen Abbildungsatz existiert dann eine biholomorphe Funktion $\phi : \mathbb{D} \to A$ mit $\phi(0) = z_0$. Wir setzen

$$g := \phi^{-1} \circ f \circ \phi.$$

Dann gilt $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ und $g(0) = 0$. Außerdem gilt $|g(z)| \to 1$ für $|z| \to 1$.

Seien nun $a_1 = 0, a_2, ..., a_m$ die Nullstellen von g, gezählt gemäß Vielfachheit. Sei $B : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$B(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}.$$

Dann gilt $|B(z)| \to 1$ für $|z| \to 1$.

Für den Quotienten $Q(z) = g(z)/B(z)$ gilt dann $|Q(z)| \to 1$ für $|z| \to 1$ und $Q(z) \neq 0, \infty$ für $z \in \mathbb{D}$. Hieraus folgt $Q(z) \equiv c$ für ein $c \in \partial\mathbb{D}$, also $g(z) = cB(z)$.

Nun gilt $B(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $B(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ und $B(\widehat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}}) \subset \widehat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}}$. Hieraus folgt, dass $B'(z) \neq 0$ für $z \in \partial\mathbb{D}$.

Wir nehmen nun an, dass $B'(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{D}$. Dann gilt $a_2, ..., a_m \neq 0$, da sonst $B'(0) = 0$ gelten würde. Weiter gilt $B(z) = 1/\overline{B(1/\overline{z})}$ und dies impliziert, dass $B'(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ sowie dass $B(z) \sim z/B'(0)$ für $z \to \infty$, also $B'(z) \to 1/B'(0)$ für $z \to \infty$. Nun gilt

$$B'(z) = \frac{P(z)}{\prod_{j=1}^{m}(1 - \overline{a_j}z)^2}$$

mit einem Polynom P. Wegen $a_1 = 0$ und $a_2, ..., a_m$ hat der Nenner Grad $2m-2$. Es folgt, dass P Grad $2m-2$ hat. Da B' keine Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, gilt also $m = 1$ und damit $g(z) = cB(z) = cz$. Wir erhalten $|f'(z_0)| = |g'(0)| = |c| = 1$, was ein Widerspruch ist.

Bemerkung. Ähnlich Argumente können auch im allgemeinen Fall angewendet werden, d.h., im Fall, dass A mehrfach zusammenhängend ist. Statt des Riemannschen Abbildungssatzes verwendet man jetzt den sogenannten Uniformisierungssatz, welcher liefert, dass es eine Überlagerungsabbildung $\phi : \mathbb{D} \to A$ gibt.

Sei z_0 ein periodischer Punkt der Periode p. Die Menge $\{z_0, f(z_0), ..., f^{p-1}(z_0)\}$ bezeichnen wir dann als *periodischen Zykel*. Wir nennen diesen Zykel anziehend, abstoßend, usw., wenn dies der Punkt z_0 ist. (Diese Definition hängt nicht von der Wahl von z_0 ab, da alle Punkte eines periodischen Zykels den gleichen Multiplikator haben.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 1.4 ist dann das folgende Resultat.

Satz 1.5. *Sei f Polynom vom Grad $d \geq 2$. Dann hat f höchstens $d-1$ anziehende Zykel in $\mathbb{C}$.*

Bemerkung. 1. Analog gilt, dass eine rationale Funktion vom Grad d höchstens $2d-2$ anziehende Zykel hat.

2. Auch Leangebiete enthalten kritische Punkte, und damit ist auch die Anzahl ihrer Zykel durch die der kritischen Punkte beschränkt.

3. Auch bei irrational indifferenten periodischen Punkten gibt es einen Zusammenhang zu kritischen Punkten (für linearisierbare Punkte vgl. I, Satz 6.8), aber hier ist es nicht so offensichtlich, wie man jedem irrational indifferenten Punkt einen kritischen Punkt zuordnen kann. Es gilt aber folgendes Resultat.

Satz 1.6. *Sei f Polynom vom Grad $d \geq 2$. Dann hat f höchstens $d-1$ Zykel in $\mathbb{C}$, die nicht abstoßend sind.*

Hilfssatz 1.1. *Seien $z_1, \ldots, z_m, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$, mit $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$. Dann existiert ein Polynom p mit $p(z_j) = a_j$ und $p'(z_j) = b_j$, $j = 1, \ldots, m$.*

Beweis. Zunächst existiert zu gegebenen $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ ein Polynom q mit $q(z_j) = c_j$ für $j = 1, \ldots, m$, nämlich

$$q(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k \prod_{j\neq k} \frac{z - z_j}{z_k - z_j}.$$

Insbesondere existiert also ein Polynom p_1 mit $p_1(z_j) = a_j$.

Sei

$$p_2(z) := \prod_{j=1}^{m}(z - z_j)$$

und p_3 ein beliebiges Polynom. Für

$$p := p_1 + p_2 p_3$$

gilt dann

$$p(z_j) = p_1(z_j) + p_2(z_j)p_3(z_j) = a_j$$

und

$$\begin{aligned} p'(z_j) &= p_1'(z_j) + p_2'(z_j)p_3(z_j) + p_2(z_j)p_3'(z_j) \\ &= p_1'(z_j) + p_2'(z_j)p_3(z_j). \end{aligned}$$

Das Polynom p leistet das Verlangte, falls

$$p_3(z_j) = \frac{b_j - p_1'(z_j)}{p_2'(z_j)}.$$

Wie zu Beginn des Beweises bemerkt, existiert ein Polynom p_3 mit dieser Eigenschaft. Man beachte dabei, dass $p_2'(z_j) \neq 0$ gilt. □

Bemerkung. 1. Der Beweis zeigt, dass p mit $\text{grad}(p) \leq 2m - 1$ gewählt werden kann.

2. Ein alternativer Beweis geht wie folgt: Man macht den Ansatz $p(z) = \sum_{k=0}^{2m-1} \alpha_k z^k$. Dann führt $p(z_j) = a_j, p'(z_j) = b_j$ auf ein lineares Gleichungssystem für die α_j.

Beweis von Satz 1.5. Wir nehmen an, dass m periodische Zykel existieren, die nicht abstoßend sind. Zu zeigen ist, dass $m \leq d - 1$ gilt.

Seien $z_1, \ldots, z_m$ die zu diesen Zykeln gehörenden Punkte. Nach Hilfssatzrefinterpol existiert ein Polynom p mit $p(z_j) = 0$ und $p'(z_j) = f'(z_j)$ für $j = 1, \ldots, m$. Für $0 < \varepsilon < 1$ betrachten wir das Polynom

$$g := f - \varepsilon p.$$

Es gilt $g(z_j) = f(z_j)$ und

$$g'(z_j) = f'(z_j) - \varepsilon p'(z_j) = (1 - \varepsilon) f'(z_j).$$

Damit bilden die Punkte $z_1, \ldots, z_m$ auch m periodische Zykel für g und diese Zykel sind anziehend für g.

Nun existiert $R > 0$ mit $|z_j| < R$ für alle j und

$$\min_{|z|=R} |f(z)| > R \text{ und } \min_{|z|=R} |f'(z)| > 0.$$

Damit existiert $\varepsilon_0 > 0$ so dass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ auch

$$\min_{|z|=R} |g(z)| > R. \tag{1.1}$$

Wir bezeichnen mit $A_\varepsilon^*(z_j)$ den unmittelbaren Einzugsbereich von z_j bzgl. $g = f - \varepsilon p$, d.h., die Komponente von $F(g)$, die z_j enthält. Wir zeigen jetzt, dass für $\varepsilon < \varepsilon_0$ und $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$A_\varepsilon^*(z_j) \subset U_R(0)$$

gilt. Dazu nehmen wir an, dass dies für ein ε und ein j nicht gilt. Dann existiert ein Punkt

$$w_j \in A_\varepsilon^*(z_j) \backslash U_R(0).$$

Da $A_\varepsilon^*(z_j)$ offen und zusammenhängend ist, können wir z_j und w_j durch einen Polygonzug in $A_\varepsilon^*(z_j)$ verbinden. Die Spur K dieses Polygonzuges ist dann eine kompakte, zusammenhängende Teilmenge von $A_\varepsilon^*(z_j)$ mit $z_j \in K$ und $K \cap \partial D(0, R) \neq \emptyset$. Wegen (1.1) gilt $g(K) \cap \mathbb{C} \backslash \overline{D(0, R)} \neq 0$. Außerdem ist $g(z_j) \in D(0, R) \cap g(K)$. Da $g(K)$ zusammenhängend ist, folgt $g(K) \cap \partial U_R(0) \neq 0$. Induktiv zeigt man so, dass

$$g^n(K) \cap \partial D(0, R) \neq \emptyset$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits folgt, falls, r die Periode von z_j ist, dass $g^{kr}(z) \to z_j$ für $k \to \infty$, gleichmäßig für $z \in K$. Die beiden letzten Gleichungen ergeben einen Widerspruch. Also gilt

$$A_\varepsilon^*(z_j) \subset U_R(0) \quad \text{für } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Nach Satz 1.4 hat damit g für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ mindestens m kritische Punkte in $D(0, R)$.

Um den Beweis zu vervollständigen, zeigen wir nun, dass für ε klein genug die Funktionen f und g gleich viele kritische Punkte haben, gezählt gemäß Vielfachheit. Die Behauptung $m \leq d-1$ folgt dann, da f höchstens $d-1$ kritische Punkte hat.

Es gilt nun für $|z| = R$, dass

$$|f'(z) - g'(z)| = \varepsilon |p'(z)| < |f'(z)|,$$

falls

$$\varepsilon < \frac{\min_{|\zeta|=R} |f'(\zeta)|}{\max_{|\zeta|=R} |p'(\zeta)|}.$$

(Wir können $p' \not\equiv 0$ annehmen, da sonst die letzte Behauptung trivial ist.) Die Behauptung folgt jetzt aus dem Satz von Rouché. ☐

Bemerkung. 1. Die Behauptungen der Sätze 1.5 und 1.6 sind scharf. Sei etwa

$$f(z) = (1+\varepsilon)z - z^d, \varepsilon > 0.$$

Dann hat f die Fixpunkte $z_0 = 0$ und $z_j = \varepsilon^{1/(d-1)} e^{2\pi i j/(d-1)}$, mit $j = 1, \ldots, d-1$.

Es gilt

$$f'(z_j) = (1+\varepsilon) - d z_j^{d-1} = 1 + \varepsilon - d\varepsilon = 1 - (d-1)\varepsilon.$$

Für $\varepsilon = 1/(d-1)$ hat f also $d-1$ superattraktive Fixpunkte.

2. Wie bereits bemerkt, hat Satz 1.5 ein Analogon für rationale Funktionen: Eine rationale Funktion vom Grad d hat höchstens $2d-2$ periodische Zykel, die nicht abstoßend sind.

Dies wurde von Shishikura 1986 bewiesen. Bereits Fatou hatte 1919/20 bewiesen, dass die Anzahl dieser Zykel höchstens $4d-4$ ist. Die Beweisidee ist dieselbe wie oben: Man versucht, durch „Störung“ die indifferenten Zykel anziehend zu machen. Fatou konnte aber höchstens die Hälfte der Zykel durch Störung anziehend machen. Bei Shishikura wird mit „quasikonformer Chirurgie“ gestört. Satz 1.6 ist von Douady (1982/83).

Das Fatousche Ergebnis, dass eine rationale Funktion nur endlich viele nicht anziehende periodische Zykel hat, war zentral in seinem Beweis, dass die Juliamenge einer rationalen Funktion der Abschluss der Menge der abstoßenden periodischen Punkte ist. Fatou zeigte zunächst, dass jeder Punkt der Juliamenge Häufungspunkt von periodischen Punkten ist und benutzte dann, dass von diesen nur endlich viele nicht abstoßend sind.

In I, §6, haben wir die Böttchersche Funktionalgleichung betrachtet. Wir wiederholen das Ergebnis für den superattraktiven Fixpunkt ∞ von Polynomen (vgl. I, Satz 6.7 und Bemerkung 3).

Satz 1.7. *Sei f Polynom, etwa $f(z) = c_d z^d + \ldots + c_0$ mit $c_d \neq 0$, $d \geq 2$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^{d-1} = c_d$. Dann existiert eine Umgebung U von ∞ und eine in U meromorphe und injektive Funktion $\Phi : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\Phi(z) \sim \alpha z$ für $z \to \infty$ (also $\Phi(\infty) = \infty$) so, dass $f(U) \subset U$ und*

$$\Phi(f(z)) = \Phi(z)^d \tag{1.2}$$

für $z \in U$. Haben $\tilde{U}$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \to \widehat{\mathbb{C}}$ die entsprechenden Eigenschaften, so gilt $\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z)$ für alle z aus der Komponente von $U \cap \tilde{U}$, die ∞ enthält.

Bemerkung. Die Gleichung (1.2) ist die Böttchersche Funktionalgleichung.

Das Iterationsverhalten bei anziehenden aber nicht superattraktiven Fixpunkten wird durch die Schrödersche Funktionalgleichung beschrieben. Ist f rational (oder ganz), $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda$, $0 < |\lambda| < 1$, so findet man zunächst $\Phi(z) = z + O(z^2)$ holomorph nahe 0 mit

$$\Phi(f(z)) = \lambda \Phi(z).$$

Es folgt

$$\Phi(z) = \frac{\Phi(f^n(z))}{\lambda^n}$$

für $n \in \mathbb{N}$, und dies kann benutzt werden, um Φ holomorph (bzw. meromorph falls $\infty \in A^*(0)$) auf $A^*(0)$ fortzusetzen.

Entsprechendes gilt für die Lösungen der Abelschen Funktionalgleichung

$$\Phi(f(z)) = \Phi(z) + 1$$

in Leaugebieten.

Die Lösungen der Böttcherschen Funktionalgleichung können im Allgemeinen nicht auf den unmittelbaren Einzugsbereich des superattraktiven Fixpunktes fortgesetzt werden, auch nicht im Spezialfall von Polynomen mit superattraktivem Fixpunkt ∞. Denn schreibt man (1.2) als

$$\Phi(z) = \Phi(f(z))^{1/d} = \Phi(f^n(z))^{1/d^n},$$

so müssen keine meromorphen Zweige der rechts stehenden Wurzel existieren.

Wir werden aber eine Bedingung angeben, unter der dies möglich ist. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel.

Exkurs über eigentliche Abbildungen

Definition 1.2. Seien $U, V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ Gebiete und sei $f : U \to V$ meromorph. Dann heißt f eigentlich, wenn für jedes Kompaktum $K \subset V$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt ist.

Für eine Folge (z_n) in U schreiben wir $z_n \to \partial U$, falls (z_n) keinen Häufungswert in U hat. Es liegen dann alle Häufungswerte von (z_n) in ∂U.

Satz 1.8. *Eine meromorphe Funktion $f : U \to V$ ist genau dann eigentlich, wenn für jede Folge (z_n) in U mit $z_n \to \partial U$ auch $f(z_n) \to \partial V$ gilt.*

Beweis. Sei f eigentlich und sei (z_n) Folge in U mit $z_n \to \partial U$. Wir nehmen an, dass die Folge $(f(z_n))$ einen Häufungswert in V hat, etwa $f(z_{n_k}) \to w_0 \in V$.

Sei W Umgebung von w_0 mit $\overline{W} \subset V$. Dann ist $\overline{W}$ kompakt, aber $f^{-1}(\overline{W})$ ist nicht kompakt, da $z_{n_k} \in W$ für genügend große k. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt $f(z_n) \to \partial V$.

Es gelte nun $f(z_n) \to \partial V$ für jede Folge (z_n) in U mit $z_n \to \partial U$. Sei $K \subset V$ kompakt und (z_n) Folge in $f^{-1}(K)$. Dann hat $(f(z_n))$ eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in K liegt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $f(z_n) \to w_0 \in K$. Damit folgt $z_n \not\to \partial U$, da sonst $f(z_n) \to \partial V$ gelten würde. Also hat (z_n) eine Teilfolge mit Grenzwert in U, etwa $z_{n_k} \to u_0 \in U$. Wegen $f(z_{n_k}) \to f(u_0)$ folgt $f(u_0) = w_0$, also $u_0 \in f^{-1}(K)$. Damit ist $f^{-1}(K)$ kompakt. $\square$

Bemerkungen. 1. Hat die eigentliche Abbildung $f : U \to V$ eine stetige Fortsetzung auf ∂U, so folgt $f(\partial U) \subset \partial V$.

Wir werden zeigen, dass eigentliche Abbildungen surjektiv sind. Da meromorphe Funktionen offene Abbildungen sind, gilt damit $\partial V \subset f(\partial U)$. Insgesamt erhält man also $f(\partial U) = \partial V$.

2. Seien G, H Gebiete und sei $f : G \to H$ meromorph. Sei $V \subset H$ Gebiet und sei U Komponente von $f^{-1}(H)$ mit $\overline{U} \subset G$. Es folgt aus Satz 1.8, dass $f|_U : U \to V$ dann eigentlich ist.

Ist $f : G \to H$ meromorph und nicht konstant und ist $u_0 \in G$ eine m-fache v_0-Stelle von f, so existieren Umgebungen V von v_0, und U von u_0, so dass U Komponente von $f^{-1}(V)$ ist und jedes $v \in V$ genau m Urbilder in U hat, gezählt gemäß Vielfachheit. Nach obiger Bemerkung ist $f : U \to V$ eigentlich.

Die Eigenschaft, dass jedes $v \in V$ gleich viele Urbilder in U hat, gilt allgemein für eigentliche Abbildungen $f : U \to V$.

Satz 1.9. *Sei $f : U \to V$ eigentlich. Dann existiert $d \in \mathbb{N}$, so dass jedes $v \in V$ genau d Urbilder in U hat.*

Definition 1.3. Die Zahl d aus Satz 1.9 heißt *Abbildungsgrad* von f.

Beweis. Da $\{v\}$ kompakt ist, ist $f^{-1}(v)$ kompakt und damit endlich für alle v. Wir bezeichnen mit $d(v)$ die Anzahl der Urbilder von v.

Sei nun $v_0 \in V$ und seien $z_1, \ldots, z_\ell$ die Urbilder von v_0, mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_\ell$. Es gilt also $d(v_0) = \sum_{j=1}^{\ell} m_\ell$. Dann existieren Umgebungen $U_1, \ldots, U_\ell$ von $z_1, \ldots, z_\ell$ und eine Umgebung V_0 von v_0, so dass jedes $v \in V_0$ genau $d(v_0)$ Urbilder in $U_0 = \bigcup_{j=1}^{\ell} U_j$ hat.

Wir nehmen nun an, dass eine Folge (v_n) in V_0 mit $v_k \to v$ und $d(v_n) > d(v_0)$ existiert. Dann existiert $u_n \in U \backslash U_0$ mit $f(u_n) = v_n$. Da f eigentlich ist, gilt $u_n \not\to \partial U$ und damit existiert eine Teilfolge (U_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u_0 \in U$. Es folgt $f(u_0) = v_0$, aber $u_0 \neq z_j$ für alle j. Dies ist ein Widerspruch. Damit existiert eine Folge (v_n) mit der obigen Eigenschaft nicht. Folglich existiert eine Umgebung V' von v_0 mit $d(v) = d(v_0)$ für alle $v \in V'$.

Hieraus folgt, dass für jedes $v_0 \in V$ die Menge $\{v \in V : d(v) = d(v_0)\}$ offen ist. Da V zusammenhängend ist, impliziert das, dass $d(v) \equiv d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. ☐

Satz 1.10. *Sei f Polynom vom Grad $d \geq 2$, sei Φ die zugehörige Böttcherfunktion bei ∞ und sei $\Psi = \Phi^{-1}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Ψ hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}$*
(ii) *Ψ hat eine bijektive meromorphe Fortsetzung $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$*
(iii) *$A(\infty) \cap \operatorname{Crit}(f) = \emptyset$.*

Beweis. Zu (i)$\Rightarrow$ (ii): Aus der Funktionalgleichung

$$f(\Psi(z)) = \Psi(z^d)$$

folgt

$$f^n(\Psi(z)) = \Psi(z^{d^n})$$

Zunächst einmal zeigt dies, dass die meromorphe Fortsetzung von Ψ nach $A(\infty)$ abbildet. Außerdem liefert diese Gleichung, dass $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$ eigentlich ist. Denn ist $K \subset A(\infty)$ kompakt, so existiert zu $R > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f^n(z)| \geq R$ für $n \geq N$ und $z \in K$. Ist $\Psi(z) \in K$, so gilt also $|\Psi(z^{d^n})| \geq R$ für $n \geq N$ und $z \in \Psi^{-1}(K)$. Wählt man etwa $R \geq \max_{|z|=2} |\Psi(z)|$, so folgt dass $|z|^{d^n} \geq 2$ für $n \geq N$ und $z \in \Psi^{-1}(K)$, also $|z| \geq 2^{1/d^N}$ für $z \in \Psi^{-1}(K)$. Damit ist $\Psi^{-1}(K)$ kompakte Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}$.

Folglich ist $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$ eigentlich. Da Ψ einen einfachen Pol bei ∞ und keine weiteren Pole hat, hat Ψ Abbildungsgrad 1. Also ist $\Psi : \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$ bijektiv.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Aus der Funktionalgleichung folgt

$$f'(\Psi(z))\Psi'(z) = \Psi'(z^d) d z^{d-1}$$

für $z \in \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}$. Da Ψ bijektiv ist, gilt $\Psi'(z) \neq 0$ für $z \in \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}$. Es folgt $f'(w) \neq 0$ für $w \in \Psi(\widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}) = A(\infty)$, also $\operatorname{Crit}(f) \cap A(\infty) = \emptyset$.

Zu (iii)$\Rightarrow$ (i). Gilt (i) nicht, so existiert $R > 1$, so dass Ψ meromorph auf

$$\Delta(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

ist, aber nicht auf $\overline{\Delta(R)}$ meromorph fortsetzbar ist. Es folgt, dass Ψ eine Singularität a auf $\partial\Delta(R)$ hat. Wir schreiben die Funktionalgleichung für Ψ in der Form

$$\Psi(z) = f^{-1}(\Psi(z^d))$$

mit einem geeigneten Zweig der Umkehrfunktion von f. Es folgt, dass $b = \Psi(a^d)$ Singularität von f^{-1} ist.

Damit gilt $b = f(z_0)$ für ein $z_0 \in \operatorname{Crit}(f)$, d.h., $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f'(z_0) = 0$. Wegen $f^n(b) = f^n(\Psi(a^d)) = \Psi(a^{d^{n+1}}) \to \infty$ gilt $b \in A(\infty)$.

□

Bemerkung. 1. Gelten die Aussagen aus Satz 1.10, so hat Φ natürlich eine bijektive, meromorphe Fortsetzung $\Phi : A(\infty) \to \hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}$.

2. Gelten die Aussagen aus Satz 1.10, so ist $A(\infty)$ einfach zusammenhängende Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$ und damit sind $J(f) = \partial A(\infty)$ und $K(f) = \hat{\mathbb{C}} \backslash A(\infty)$ zusammenhängend. Hier gilt auch die Umkehrung.

Satz 1.11. *Sei f Polynom vom Grad $d \geq 2$. Gilt $A(\infty) \cap \operatorname{Crit}(f) \neq \emptyset$, so haben $J(f)$ und $K(f)$ überabzählbar viele Zusammenhangskomponenten.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $N \in \mathbb{N}$ und ein von einer Jordankurve Γ berandetes Gebiet $V \subset \mathbb{C}$ existiert, so dass $\overline{f^{-N}(V)} \subset V$ und Γ einen kritischen Wert von f^N enthält.

Zum einen kann man mit den Bezeichnungen wie im Beweis des vorangegangenen Satzes $\Gamma = \Psi(\partial\Delta(R^d))$ und $V = \hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\Psi(\Delta(R^d))}$ wählen. Dann gilt obige Aussage mit $N = 1$.

Zum anderen kann man aber auch für $z_0 \in A(\infty) \cap \operatorname{Crit}(f)$ zunächst $N \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $V = D(0, |f^N(z_0)|)$ die Bedingung $\overline{f^{-1}(V)} \subset V$ erfüllt. Es gilt dann auch $\overline{f^{-N}(V)} \subset V$ und da $f^N(z_0)$ kritischer Wert von f^N ist, erhält man ebenfalls obige Aussage.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $N = 1$ annehmen. Sei nun $z_0 \in \operatorname{Crit}(f)$ und $b = f(z_0) \in \Gamma$. Dann existiert eine Umgebung W von z_0 so dass sowohl $f^{-1}(V) \cap W$ wie auch $f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{V}) \cap W$ mindestens zwei Komponenten haben. Da $f^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{V})$ zusammenhängend ist, impliziert dies, dass $f^{-1}(V)$ unzusammenhängend ist.

Seien U_1, U_2 Komponenten von $f^{-1}(V)$. Für $j \in \{1,2,3\}$ ist $f : U_j \to V$ eine eigentliche Abbildung. Da $V \cap J(f) \neq \emptyset$ aber $\partial V \subset A(\infty) \subset F(f)$ folgt $U_j \cap J(f) \neq \emptyset$ und $\partial U_j \subset F(f)$ für $j = \{1,2\}$. Damit ist $J(f)$ unzusammenhängend.

Zu $i_1, \ldots, i_k \in \{1,2\}$ findet man analog $U_{i_1,\ldots,i_k}$ mit $f^j(U_{i_1,\ldots,i_k}) \subset U_{i_j}$ für $j \leq k$ und $f^{k+1}(U_{i_1,\ldots,i_k}) = V$. Jedes der 2^k Gebiete $U_{i_1,\ldots,i_k}$ enthält Punkte der Juliamenge. Damit gilt dies auch für

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} U_{i_1,\ldots,i_k},$$

falls $(i_j)_{j\geq 1}$ Folge in $\{1,2\}$ ist. FÃ¼r zwei verschiedene Folgen $(i_j)_{j\geq 1}$ enthält man so verschiedene Komponenten von $J(f)$. Da die Menge dieser Folgen überabzählbar ist, ist auch die Menge der Komponenten von $J(f)$ überabzählbar. Entsprechend gilt dies auch für $K(f)$. □

Wir fassen die Ergebnisse noch einmal zusammen.

Satz 1.12. *Sei f Polynom vom Grad mindestens 2. Dann sind äquivalent:*

(i) *$J(f)$ ist zusammenhängend.*

(ii) *$K(f)$ ist zusammenhängend.*

(iii) *$A(\infty)$ ist einfach zusammenhängend.*

(iv) *Die Böttcherfunktion Φ lässt sich zu einer bijektiven, meromorphen Funktion*

$$\Phi : A(\infty) \to \hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}}$$

fortsetzen.

(v) *Die Inverse Ψ der Böttcherfunktion lässt sich zu einer bijektiven, meromorphen Funktion*

$$\Psi : \hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$$

fortsetzen.

(vi) $A(\infty) \cap \mathrm{Crit}(f) = \emptyset$.

Beispiel. Für $c \in \mathbb{C}$ sei $f_c^n(z) = z^2 + c$. Man nennt

$$M = \{c \in \mathbb{C} : f_c^n(0) \not\to \infty\}$$

Mandelbrotmenge. Wegen $\mathrm{Crit}(f_c) = 0$ gilt $c \in M$ genau dann, wenn $J(f_c)$ und $K(f_c)$ zusammenhängend sind.

2. Hyperbolische Funktionen

Wir werden sehen, dass man für ein Polynom f mit zusammenhängender Juliamenge unter gewissen Voraussetzungen die Funktion $\Psi : \hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$ stetig auf $\partial\mathbb{D}$ fortsetzen kann. In diesem Fall ist $J(f) = \partial A(\infty) = \Psi(\partial\mathbb{D})$ eine Kurve.

Definition 2.1. Eine rationale Funktion heißt *hyperbolisch*, falls alle kritischen Punkte im Einzugsbereich anziehender periodischer Punkte liegen.

Die Menge $\mathrm{sing}(f^{-1})$ der Singularitäten der Umkehrfunktion besteht für eine rationale Funktion f aus den kritischen Werten von f. Die postsinguläre (oder postkritische) Menge $P(f)$ ist durch

$$P(f) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathrm{sing}(f^{-1}))}$$

definiert.

Der folgende Hilfssatz wurde schon häufiger benutzt.

Hilfssatz 2.1. *Sei f ganz oder rational und sei $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $D(a,r) \cap \mathrm{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$. Dann kann jeder in einem Teilgebiet von $D(a,r)$ definierte Zweig von f^{-1} in $D(a,r)$ fortgesetzt werden. Entsprechendes gilt für die Zweige von $(f^n)^{-1}$, falls $D(a,r) \cap \bigcup_{j=0}^{n-1} f^j(\mathrm{sing}(f^{-1})) = \emptyset$. Gilt $D(a,r) \cap P(f) = \emptyset$, so gilt dies für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Satz 2.1. *Eine rationale Funktion f ist genau dann hyperbolisch, wenn $P(f) \cap J(f) = \emptyset$ gilt.*

Beweis. Sei zunächst f hyperbolisch und seien $z_1, \ldots, z_\ell$ die kritischen Punkte und $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ die anziehenden periodischen Punkte von f. Seien $V_1, \ldots, V_m$ Umgebungen der Punkte $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ mit $\overline{V_j} \subset F(f)$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $f^n(z_k) \subset \bigcup_{j=1}^m \overline{V_j}$ für alle $n \geq N$ und alle $k \in \{1, \ldots, \ell\}$. Es folgt

$$P(f) \subset \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{\ell} f^n(z_k) \cup \bigcup_{j=1}^{m} \overline{V_j}$$

und damit $P(f) \subset F(f)$, also $P(f) \cap J(f) = \emptyset$.

Sei umgekehrt $P(f) \cap J(f) = \emptyset$. Da für singuläre Gebiete U nach Teil I, §7, $\partial U \cap P(f) \neq \emptyset$ und damit wegen $\partial U \subset J(f)$ auch $P(f) \cap J(f) \neq \emptyset$ gilt, hat f keine singulären Gebiete.

Mit Hilfe des Satzes von Sullivan, des Klassifikationssatzes für periodische Fatoukomponenten sowie der in Teil I, § 6, gegebenen Zusammenhänge zwischen periodischen Fatoukomponenten und Singularitäten der Umkehrfunktion kann man nun zeigen, dass jede Komponente der Fatoumenge im Einzugsbereich eines anziehenden periodischen Punktes liegt. Da wegen $P(f) \cap J(f) = \emptyset$ alle kritischen Punkte in der Fatoumenge liegen, folgt hieraus die Behauptung.

Tatsächlich kann mit einem elementareren Argument aber auf die Anwendung der genannten Sätze verzichtet werden:

Sei dazu U Komponente der Fatoumenge und sei $(f^{n_k}|_U)$ konvergent. Dann gilt $f^{n_k}|_U \to a$ für ein $a \in \hat{\mathbb{C}}$, da sonst U singuläres Gebiet ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $a \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen, dass $a \in P(f)$. Denn wäre $a \notin P(f)$, so existiert $r > 0$ mit $D(a,r) \cap P(f) = \emptyset$. Sei nun $z_0 \in U$ und $w_k = f^{n_k}(z_0)$. Für großes k gilt $w_k \in D(a,r)$ und damit kann ein Zweig $\varphi_k : D(a,r) \to \hat{\mathbb{C}}$ der Umkehrfunktion von f^{n_k} mit $\varphi_k(w_k) = z_0$ definiert werden. Wegen $f^{n_k}|_U \to a$ folgt $(f^{n_k})'(z_0) \to 0$ und damit $\varphi_k'(w_k) \to \infty$. Andererseits bilden die Funktionen φ_k eine normale Familie. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $a \in P(f)$.

Wäre U ein wanderndes Gebiet, so würden die Punkte w_k in verschiedenen Komponenten der Fatoumenge liegen. Es gilt dann $[w_k, w_{k+1}] \cap J(f) \neq \emptyset$ für alle k und folglich $a \in J(f)$, im Widerspruch zur Annahme, dass $P(f) \cap J(f) = \emptyset$.

Ist aber einmal bekannt, dass U periodisch ist, so folgt aus $f^{n_k}|_U \to a \in F(f)$ sehr leicht, dass a anziehender periodischer Punkt ist; vgl. Teil I, Satz 4.1. ☐

Bemerkung. Das obige Argument liefert insbesondere einen elementaren Beweis Beweis dafür, dass hyperbolische Funktionen keine wandernden Gebiete haben.

Satz 2.2. *Sei f rationale Funktion mit $\infty \in F(f)$. Dann ist f genau dann hyperbolisch, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|(f^n)'(z)| > 1$ für alle $z \in J(f)$.*

Beweis. Es gelte $|f^n)'(z) > 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in J(f)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $n = 1$ annehmen. Da $J(f)$ kompakt und f' stetig ist, existiert dann $K > 1$ und $\varepsilon > 0$ mit $|f'(z)| \geq K$ für $\operatorname{dist}(z, J(f)) < \varepsilon$. Sei

$$U_\varepsilon(J(f)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, J(f)) < \varepsilon\}.$$

Wegen $f'(z) \neq 0$ für $z \in J(f)$ existiert für jedes $z_0 \in J(f)$ und $w_0 = f(z_0)$ ein Zweig φ der Umkehrfunktion von f^{-1} in einer Umgebung $D(w_0, r)$ von w_0 mit $\varphi(w_0) = z_0$. Für r genügend klein gilt $\varphi(D(w_0, r)) \subset U_\varepsilon(J(f))$. Da $J(f)$ kompakt ist, existiert $\delta > 0$ so dass für jedes $z_0 \in J(f)$ und $w_0 = f(z_0)$ der Zweig φ von f^{-1} mit $\varphi(w_0) = z_0$ holomorph in $D(w_0, \delta)$ ist. Wegen $|f'(z)| \geq K$ für $z \in U_\varepsilon(J(f))$ folgt $|\varphi'(w) \leq 1/K$ für $w \in D(w_0, \delta)$.

Sei nun $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $w_1 = f(z_1) \in U_\delta(J(f))$. Dann existiert $w_0 \in J(f)$ mit $|w_1 - w_0| < \delta$. Sei φ der in $D(w_0, \delta)$ definierte Zweig von f^{-1}, für den $\varphi(w_1) = z_1$ gilt. Mit $z_0 = \varphi(w_0)$ folgt dann

$$|z_1 - z_0| = |\int_{w_0}^{w_1} \varphi'(w) dw| \leq \frac{1}{K} |w_1 - w_0|.$$

Damit gilt $z_1 \in U_\delta(J(f))$.

Zum einen folgt, dass

$$f^{-1}(U_\delta(J(f))) \subset U_\delta(J(f)),$$

zum anderen, dass für $z_1 \in U_\delta(J(f)) \backslash J(f)$ die Ungleichung

$$\operatorname{dist}(f^n(z_1), J(f)) \geq \min\{\delta, K^n \operatorname{dist}(z_1, J(f))\}$$

gilt. Dieses impliziert einmal, dass f keine singulären Gebiete hat. Zum anderen folgt aus $f^{n_k}|_U \to a$, wobei U Komponente von $F(f)$ und $a \in \hat{\mathbb{C}}$, dass $\operatorname{dist}(a, J(f)) \geq \delta$ und damit $a \in F(f)$. Hieraus folgt wie im Beweis von Satz 2.1, dass $F(f)$ nur aus Einzugsbereichen anziehender periodischer Punkte besteht. Da $f'(z) \neq 0$ für $z \in J(f)$, ist f damit hyperbolisch.

Sei nun f hyperbolisch. Nach Satz 2.1 gilt dann $P(f) \cap J(f) = \emptyset$. Sein $\eta = \operatorname{dist}(P(f), J(f))$. Es können für $z_0 \in J(f)$ in $D(z_0, \eta)$ sämtliche Zweige der Umkehrfunktionen der Iterierten von f definiert werden. Ist etwa φ_k Zweig von $(f^{n_k})^{-1}$, mit $n_k \to \infty$, und ist $(\varphi_k|_{D(z_0,\eta)})$ konvergent, so gilt $\varphi_k|_{D(z_0,\eta)} \to a$ für ein $a \in J(f)$, da in $F(f)$ die Iterierten von f ja in Umgebungen der anziehenden periodischen Punkte abbilden.

Es folgt $\varphi_k' \to 0$ und damit $|\varphi_k'(z)| \le \frac{1}{2}$ für $z \in D(z_0, \frac{1}{2}\eta)$, falls k genügend groß ist. Da $J(f)$ kompakt ist, existiert damit $N \in \mathbb{N}$ so dass für $n \ge N$ und $z \in J(f)$ für alle in einer Umgebung von z definierten Zweige φ von $(f^n)^{-1}$ die Ungleichung $|\varphi'(z)| \le \frac{1}{2}$ gilt. Es folgt $|(f^n)'(z)| \ge 2$ für $z \in J(f)$ und $n \ge N$. □

Satz 2.3. *Sei f rational mit $\infty \in F(f)$. Dann ist f genau dann hyperbolisch, wenn $\delta > 0$ und $K > 1$ existieren, so dass $|(f^n)'(z)| \ge \delta K^n$ für $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Für n groß genug ist $\delta K^n > 1$ und damit sind Funktionen mit der im Satz angegebenen Eigenschaft nach Satz 2.2 hyperbolisch.

Sei nun f hyperbolisch. Nach Satz 2.2 existieren $N \in \mathbb{N}$ und $L > 1$ mit $|(f^N)'(z)| \ge L$ für $z \in J(f)$. Es folgt, dass $\eta := \min\limits_{z \in J(f)} |f'(z)| > 0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, \ldots, N-1\}$ mit $n = qN + r$. Mit

$$(f^n)'(z) = ((f^N)^q)'(f^r(z))(f^r)'(z)$$

folgt mit $K = L^{1/N}$ und $\delta = (\eta/K)^N$, dass

$$|(f^n)'(z)| \ge L^q \cdot \eta^r = K^{Nq+r}\left(\frac{\eta}{K}\right)^r \ge \delta K^n.$$

Man beachte dabei, dass $L \ge \eta^N$ und daher $K \ge \eta$. □

Bemerkung. 1. Funktionen mit der in Satz 2.2 und Satz 2.3 angegebenen Eigenschaft heißen auch *expandierend*.

2. Entsprechende Resultate gelten auch für $\infty \in J(f)$, wenn man die Ableitung durch die sphärische Ableitung ersetzt.

Sei S die Menge aller injektiven, holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Dann ist S normal (vgl. Übung) und damit folgt, dass für $0 < \varrho < 1$ positive Konstanten $A_\varrho, B_\varrho, C_\varrho$ und D_ϱ existieren, so dass

$$A_\varrho \le \frac{|f(z)|}{|z|} \le B_\varrho$$

und

$$C_\varrho \le |f'(z)| \le D_\varrho$$

für $|z| \le \varrho$, $z \ne 0$. Außerdem erhält man hieraus noch die Existenz einer positiven Konstanten K mit

$$f(\mathbb{D}) \supset D(0, K)$$

für alle $f \in S$.

Im Prinzip würden obige Resultate für alle folgenden Anwendungen ausreichen. Da aber die bestmöglichen Werte für alle obigen Konstanten bekannt sind, formulieren wir das Resultat mit diesen Werten, auch wenn es eigentlich in dieser Form nicht benötigt wird.

Hilfssatz 2.2 (Koebescher Verzerrungssatz). Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv mit $f(0) = 0$ und $|f'(0)| = 1$. Dann gilt

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

und

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

für $z \in \mathbb{D}$. Außerdem gilt

$$f(\mathbb{D}) \supset D\left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Bemerkung. Gleichheit gilt für

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Diese Funktion bildet $\mathbb{D}$ biholomorph auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -\frac{1}{4}]$ ab.

Wir wollen obigen Satz auf injektive holomorphe Funktionen $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ übertragen. Die durch

$$z \mapsto \frac{f(a+rz) - f(a)}{rf'(a)}$$

definierte Funktion erfüllt dann die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.2. Man erhält folgendes Ergebnis:

Hilfssatz 2.3. Sei $a \in \mathbb{C}$ injektiv. Sei $0 < \varrho < 1$ und $z \in \overline{D(a, \varrho r)}$. Dann gilt

$$\frac{\varrho}{(1+\varrho)^2} \le \frac{|f(z) - f(a)|}{r|f'(a)|} \le \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}$$

und

$$\frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3} \le \frac{|f'(z)|}{|f'(a)|} \le \frac{1+\varrho}{(1-\varrho)^3}.$$

Außerdem gilt

$$f(D(a,r)) \supset D\left(f(a), \frac{1}{4}r|f'(a)|\right).$$

Satz 2.4. *Sei f hyperbolisches Polynom vom Grad $d \ge 2$ und sei $J(f)$ zusammenhängend. Dann hat die Inverse $\Psi : \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$ der Böttcherfunktion eine stetige Fortsetzung auf $\partial\mathbb{D}$ und $J(f) = \Psi(\partial\mathbb{D})$ ist eine Kurve.*

Beweis. Auf Grund von Satz 2.2 können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $|f'(z)| > 1$ für $z \in J(f)$ gilt. Damit existieren $\delta > 0$ und $K > 1$ mit $|f'(z)| \ge K$ für $z \in U_\delta(J(f))$.

Wir zeigen zunächst, dass $R_0 > 1$ existiert, so dass $\Psi(z) \in U_\delta(J(f))$ für $|z| < R_0$. Andernfalls existiert eine Folge (z_n) in $\hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ mit $|z_n| \to 1$ und $\operatorname{dist}(\Psi(z_n), J(f)) \ge \delta$.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\Psi(z_n) \to w_0$ für ein $w_0 \in \overline{A(\infty)}$ mit $\operatorname{dist}(w_0, J(f)) \ge \delta$ gilt. Es gilt also $w_0 \in A(\infty)$ und dies impliziert, dass $z_n \to \Psi^{-1}(w_0)$ gilt. Dies ist ein Widerspruch und damit existiert ein R_0 mit der verlangten Eigenschaft.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $R_n = R_0^{1/d^n}$. Für $|z| = R_n$ gilt dann

$$|(f^n)'(\Psi(z))| = |\Psi'(z^{d^n})| \cdot d^n |z|^{d^n - 1} \le M R_0 d^n,$$

wobei $M = \max_{|z|=R_0} |\Psi'(z)|$.

Wegen

$$|(f^n)'(\Psi(z))| = |\Psi'(z)| \prod_{j=0}^{n-1} |f'(f^j(z))| \ge K^n |\Psi'(z)|$$

erhalten wir

$$|\Psi'(z)| \le \frac{M R_0 d^n}{K^n}$$

für $|z| = R_n$. Sei nun $\gamma_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma_n(t) = \Psi(R_n e^{it})$. Mit

$$\varrho_n = \frac{R_n - 1}{R_n - R_{n+1}}$$

folgt mit Hilfssatz 2.3, dass

$$\begin{aligned} |\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)| &= |\Psi(R_{n+1}e^{it}) - \Psi(R_n e^{it})| \\ &\leq \frac{\varrho_n}{(1-\varrho_n)^2}(R_n - 1)|\Psi'(R_n e^{it})| \\ &\leq \frac{\varrho_n}{(1-\varrho_n)^2}(R_n - 1)\frac{MR_0 d^n}{K^n}. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$R_n - 1 = \exp\left(\frac{1}{d^n}\log R_0\right) - 1 \sim \frac{1}{d^n}\log R_0$$

und damit

$$R_n - R_{n+1} \sim \left(1 - \frac{1}{d}\right)\frac{1}{d^n}\log R_0$$

für $n \to \infty$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n = 1 - \frac{1}{d}$$

und damit gilt

$$|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)| \leq 2\left(1 - \frac{1}{d}\right)d^2\frac{1}{d^n}\log R_0 \frac{MR_0 d^n}{K^n} = \frac{2d(d-1)MR_0\log R_0}{K^n}$$

für große n. Es folgt, dass (γ_n) gleichmäßig konvergiert. Obiges Argument liefert auch, dass

$$|\Psi(re^{it}) - \gamma_n(t)| \leq \frac{2d(d-1)MR_0\log R_0}{K^n}$$

für $R_{n+1} \leq r \leq R_n$, falls n groß genug ist. Hieraus folgt, dass Ψ stetig auf $\partial\mathbb{D}$ fortsetzbar ist.

Bezeichnet man die Fortsetzung wieder mit Ψ, so folgt nun unmittelbar, dass $\Psi(\partial\mathbb{D}) = \partial A(\infty) = J(f)$ gilt. □

Bemerkungen. 1. Die Voraussetzungen, dass f hyperbolisch ist, kann abgeschwächt werden. Beispielsweise kann man präperiodische kritische Punkte in $J(f)$ zulassen. Ein Polynom, bei dem alle kritische Punkte in Einzugsbereichen anziehender Fixpunkte liegen oder präperiodisch sind, heißt subhyperbolisch.

2. Auch für hyperbolische rationale Funktionen mit einem vollständig invarianten Gebiet ist die Juliamenge eine Kurve, falls sie zusammenhängend ist. Auch wenn $J(f)$ nicht zusammenhängend ist, ist der Rand jeder einfach zusammenhängenden Komponente von $F(f)$ dann eine Kurve.

3. Mit den Bezeichnungen des Beweises folgt

$$|\gamma_n(t) - \gamma(t)| \leq \frac{c_1}{K^n}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit einer Konstanten c_1. Außerdem existiert $c_2 > 0$ mit

$$|\Psi(z) - \gamma_n(t)| \leq \frac{c_2}{K^n}$$

für $|z - R_n e^{it}| \leq R_n - R_{n+1}$. Insbesondere folgt

$$|\gamma_n(s) - \gamma_n(t)| \leq \frac{c_2}{K^n}$$

falls $|R_n e^{is} - R_n e^{it}| \leq R_n - R_{n+1}$. Wegen $|e^{is} - e^{it}| \leq |s-t|$ und

$$\frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} \sim \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{1}{d^n} \log R_0$$

existiert damit $\delta > 0$, so dass

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq \frac{c_2}{K^n} \text{ für } |s-t| \leq \frac{\delta}{d^n}.$$

Seien nun $s, t \in \mathbb{R}$ mit $|s-t| < \delta$ und sei $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{\delta}{d^{n+1}} < |s-t| \leq \frac{\delta}{d^n}.$$

Dann gilt

$$2n \geq n+1 \geq \frac{\log \delta - \log |s-t|}{\log d}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\gamma(s) - \gamma(t)| &\leq |\gamma_n(s) - \gamma_n(t)| + |\gamma_n(s) - \gamma(s) + |\gamma_n(t) - \gamma(t)| \\ &\leq (c_2 + 2c_1) \frac{1}{K^n} \\ &= (c_2 + 2c_1) \exp(-n \log K) \\ &\leq (c_2 + 2c_1) \exp\left(\frac{\log|s-t| - \log \delta}{2 \log d} \log K\right) \\ &= \eta |s-t|^\alpha, \end{aligned}$$

wobei

$$\eta = (c_2 + 2c_1) \exp\left(-\frac{\log \delta}{z \log d} \log K\right) \text{ und } \alpha = \frac{\log K}{2 \log d}.$$

Hieraus folgt mit der der Periodizität von γ leicht, dass $\beta > 0$ mit

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq \beta |s-t|^\alpha$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$ existiert (und nicht nur für $|s-t| < \delta$).

Definition 2.2. Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume. Eine Funktion $h : X \to Y$ heißt *hölderstetig*, falls $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass $d_y(h(x), h(y)) \leq \beta d_x(x, y)^\alpha$ für alle $x, y \in X$. Die Zahl α heißt dann *Hölderexponent*.

Obige Bemerkung besagt also, dass die Inverse Ψ der Böttcherfunktion bei hyperbolischen Polynomen eine Fortsetzung auf $\partial\mathbb{D}$ hat, die dort hölderstetig ist. Betrachtet man Hölderstetigkeit bezüglich der sphärischen Metrik, so ist Ψ hölderstetig in $\hat{\mathbb{C}} \backslash \mathbb{D}$.

Wir zeigen jetzt, dass in Satz 2.4 auf auf die Voraussetzung der Hyperbolizität nicht verzichtet werden kann.

Satz 2.5. *Sei $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, so dass $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$ nicht linearisierbar in 0 ist. Dann ist $J(f)$ zusammenhängend, aber die Inverse Ψ der Böttcherfunktion hat keine stetige Fortsetzung auf $\partial\mathbb{D}$.*

Beweis. Mit $c = -\frac{1}{2} e^{2\pi i \alpha}$ gilt $\mathrm{Crit}(f) = \{c\}$. Würde $c \in A(\infty)$ gelten, so wäre f hyperbolisch, im Widerspruch zu $|(f^n)'(0)| = |e^{2\pi i \alpha n}| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $c \notin A(\infty)$ und damit ist $J(f)$ nach Satz 1.12 zusammenhängend.

Aus Satz 1.6 folgt, dass alle periodischen Zykel außer dem Fixpunkt 0 abstoßend sind. Nach Klassifikation der periodischen Fatoukomponenten und dem Satz von Sullivan folgt damit $F(f) = A(\infty)$.

Wir nehmen nun an, dass Ψ eine stetige Fortsetzung auf $\partial\mathbb{D}$ hat. Es gilt dann $\Psi(\partial\mathbb{D}) = J(f)$ und wegen $0 \in J(f)$ ist $P = \Psi^{-1}(0)$ eine nicht leere Teilmenge von $\partial\mathbb{D}$, die wegen der Stetigkeit von Ψ abgeschlossen ist.

Wegen $|f(c)| = |e^{2\pi i\alpha}c + c^2| \geq |c| - |c|^2 = \frac{1}{4}$ ist der durch $\varphi(0) = 0$ gegebene Zweig von f^{-1} holomorph in $D\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Da Ψ gleichmäßig stetig auf $\partial\mathbb{D}$ ist, existiert zu $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ ein $\delta > 0$ mit $|\Psi(z) - \Psi(\zeta)| < \varepsilon$ für $|z - \zeta| < \delta$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Sei $U = \{z \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}} : \operatorname{dist}(z, P) < \delta\}$ und $V = \Psi(u)$. Dann gilt $V \subset D(0, \varepsilon) \cap A(\infty)$. Wir zeigen nun, dass $\varphi(V) \subset V$ gilt.

Sei dazu $v_0 \in V$ und $v_1 = \varphi(v_0)$. Wir setzen $u_0 = \Phi(v_0) = \Psi^{-1}(v_0) \in U$ und $u_1 = \Phi(v_1)$. Dann gilt

$$\Psi(u_1^2) = f(\Psi(u_1)) = f(v_1) = v_0$$

und damit

$$u_1^2 = \Phi(v_0) = u_0.$$

Nun existiert $p_0 \in P$ mit $|u_0 - p_0| < \delta$. Man kann nun annehmen, dass $\delta < 1$ gilt.

Sei $p_1 \in \partial\mathbb{D}$ mit $p_1^2 = p_0$. Wegen

$$|(u_1 - p_1)(u_1 + p_1)| = |u_1^2 - p_1^2| = |u_0 - p_0| < \delta < 1$$

gilt dann $|u_1 - p_1| < 1$ oder $|u_1 + p_1| < 1$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $|u_1 - p_1| < 1$ gilt. Hieraus folgt, dass

$$|u_1 + p_1| = |2p_1 + u_1 - p_1| \geq 2|p_1| - |u_1 - p_1| > 1$$

gilt. Damit erhalten wir

$$|u_1 - p_1| = \left|\frac{u_1^2 - p_1^2}{u_1 + p_1}\right| < |u_1^2 - p_1^2| = |u_0 - p_0| < \delta.$$

Des weiteren gilt $p_1 \in P$, denn wegen

$$f(\Psi(p_1)) = \Psi(p_1^2) = \Psi(p_0) = 0$$

gilt $\Psi(p_1) = 0$ oder $\Psi(p_1) = -e^{2\pi i\alpha}$. Da aber

$$|v_1 - \Psi(p_1)| = |\Psi(u_1) - \Psi(p_1)| < \varepsilon$$

und $v_1 = \varphi(v_0)$ mit $|v_0| < \varepsilon$, folgt $|v_1 - \Psi(p_1)| < 1$ und damit $v_1 = \Psi(p_1)$, falls ε klein genug gewählt wird. Da $p_1 \in P$ folgt $\operatorname{dist}(u_1, P) < \delta$, also $u_1 \in U$ und folglich $v_1 \in V = \Psi(u)$. Insgesamt folgt $\varphi(V) \subset V$.

Nun existiert $\eta > 0$ mit $|\Psi(z)| \geq \eta$ für $z \in \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ mit $\operatorname{dist}(z, P) \geq \delta$, das heißt, für $z \in \hat{\mathbb{C}}\backslash(\overline{\mathbb{D}} \cup U)$. Es folgt, dass $D(0, \eta) \cap A(\infty) \subset \Psi(u) = V$. Da $F(f) = A(\infty)$, gilt $\overline{A(\infty)} = \hat{\mathbb{C}}$ und dies impliziert, dass $\overline{D(0, \eta)} \subset \overline{V}$. Bezeichnet $\tilde{V}$ das Innere von $\overline{V}$, so folgt $D(0, \eta) \subset \tilde{V}$. Aus $\varphi(V) \subset V$ erhalten wir $\varphi(\overline{V}) \subset \overline{V}$ und damit $\varphi(\tilde{V}) \subset \tilde{V}$.

Hieraus ergibt sich, dass φ linearisierbar ist, etwa $\varphi(h(z)) = h(e^{-2\pi i\alpha}z)$ mit einer in 0 holomorphen Funktion h, welche $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$ erfüllt. Wir erhalten $h(e^{2\pi i\alpha}z) = f(h(z))$.

Damit ist ist f linearisierbar, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Nach Satz 2.5 hat Ψ im Allgemeinen keine stetige Fortsetzung auf $\partial\mathbb{D}$. Wir zeigen aber, dass für gewisse θ der Grenzwert $\lim\limits_{r\to 1} \Psi(re^{i\theta})$ existiert.

Definition 2.3. Sei f Polynom mit zusammenhängender Juliamenge und sei $\Psi : \hat{\mathbb{C}}\backslash\overline{\mathbb{D}} \to A(\infty)$ die Inverse der Böttcherfunktion. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$R_t := \{\Psi(re^{2\pi it}) : r > 1\}$$

externer Strahl von f (oder auch von $J(f)$ bzw. $K(f)$) mit Argument t.

Der externe Strahl R_t heißt *periodisch*, falls $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(R_t) = R_t$ existiert, und R_t heißt *präperiodisch*, falls $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ und $f^m(R_t) = f^n(R_t)$ existieren.

Ist $t \in \mathbb{Q}$, so heißt R_t rational.

$$\gamma(t) := \lim_{r \to 1} \Psi(re^{2\pi it}),$$

so sagt man, dass der externe Strahl R_t landet und nennt $\gamma(t)$ *Landepunkt*.

Mit der Funktionalgleichung

$$\Psi(z^d) = f(\Psi(z))$$

folgt $f(R_t) = R_{dt}$. Dabei ist d der Grad von f. Damit ist R_t genau dann präperiodisch, wenn $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ sowie $\ell \in \mathbb{Z}$ mit

$$d^n t = d^m t + \ell$$

existieren. Aus der Existenz von ℓ, m, n mit dieser Eigenschaft folgt

$$t = \frac{\ell}{d^n - d^m} \in \mathbb{Q}.$$

Ist aber umgekehrt $t \in \mathbb{Q}$, etwa $t = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$, so existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ und

$$d^n \equiv d^m (\mod q).$$

Es folgt, dass

$$\ell := d^n t - d^m t = \frac{d^n d^m}{q} p \in \mathbb{Z}$$

gilt, und dies zeigt, dass R_t präperiodisch ist.

Setzt man in der obigen Diskussion $m = 0$, so erhält man eine Charakterisierung der periodischen strahlen. Dies führt auf folgendes Ergebnis.

Satz 2.6. *Sei R_t externer Strahl. Dann gilt:*

(i) *R_t ist genau dann präperiodisch, wenn t rational ist.*

(ii) *R_t ist genau dann periodisch, wenn $\ell \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$t = \frac{\ell}{d^n - 1}$$

existieren.

Satz 2.7. *Periodisch externe Strahlen landen. Die Landepunkte dieser Strahlen sind ebenfalls periodisch.*

Zum Beweis benötigen wir folgendes Korollar zum Satz von Koebe.

Hilfssatz 2.4. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $h : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Seien $z_0, z_1 \in G$ mit $|z_1 - z_0| < dist(z_0, \partial G)$. Mit*

$$\varrho := \frac{|z_1 - z_0|}{\operatorname{dist}(z_0, \partial G)}$$

gilt dann

$$|h(z_1) - h(z_0)| \leq \frac{4\varrho}{(1-\varrho)^2} \operatorname{dist}(h(z_0), h(G)).$$

Beweis. Sei $r = \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. Nach Satz von Koebe (Hilfssatz 2.3), angewandt auf die Einschränkung von h auf $D(z_0, r)$, gilt

$$\operatorname{dist}(h(z_0), \partial h(G)) \geq \operatorname{dist}(h(z_0), \partial h(D(z_0, r))) \geq \frac{1}{4}|h'(z_0)|r$$

sowie

$$|h(z_1) - h(z_0)| \leq \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2} r|h'(z_0)|.$$

Die Behauptung folgt. □

Beweis von Satz 2.7. Es reicht, den Fall $f(R_t) = R_t$ zu betrachten. Dann gilt $dt \equiv t \pmod 1$. Mit $\alpha = 2\pi t$ folgt $f(\Psi(re^{id})) = \Psi(r^d e^{i\alpha})$ für $r > 1$.

Wir betrachten die Menge A aller Punkte $a \in \mathbb{C}$, für die eine Folge (r_k) in $(1, \infty)$ mit $r_k \to 1$ und $\Psi(r_k e^{i\alpha}) \to a$ existiert. Zu zeigen ist, dass $A = \{a\}$ mit einem periodischen Punkt a.

Nun gilt $A \subset J(f)$ und

$$A = \bigcap_{r>1} \overline{\{\Psi(se^{id}) : 1 < s < r\}}.$$

Hieraus folgt, dass A zusammenhängend ist.

Sei nun $a \in A$ und (r_k) Folge in $(1, \infty)$ mit $r_k \to 1$ und $z_k := \Psi(r_k e^{i\alpha}) \to a$. Mit Hilfssatz 2.4. folgt

$$|f(z_k) - z_k| = |\Psi(r_k^d e^{i\alpha}) - \Psi(r_k e^{i\alpha})| \leq \frac{4\varrho_k}{(1-\varrho_k)^2} \operatorname{dist}(f(z_k), J(f))$$

mit

$$\varrho_k = \frac{r_k^d - r_k}{r_k^d - 1}\ .$$

Nun gilt $\varrho_k \to (d-1)/d$ und damit folgt

$$|f(z_k) - z_k| \leq 5(d-1)d \operatorname{dist}(f(z_k), J(f))$$

für große k. Außerdem gilt $\operatorname{dist}(f(z_k), J(f)) \to 0$ für $k \to \infty$. Dies impliziert, dass

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} z_k = a\ .$$

Damit besteht A nur aus Fixpunkten von f. Da A zusammenhängend ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Mit etwa mehr Aufwand kann man, mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis des Klassifikationssatzes für periodische Fatoukomponenten, zeigen, dass Landepunkte periodischer Strahlen abstoßende oder rational indifferente periodische Punkte sind. Desweiteren kann man zeigen, dass jeder abstoßende oder rational indifferente Fixpunkt Landepunkt mindestens eines periodischen externen Strahls ist. Ebenso entsprechen die präperiodischen externen Strahlen präperiodischen Punkten.

Es ist bekannt, dass für eine konforme Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, die eine hölderstetige Fortsetzung auf $\partial\mathbb{D}$ hat, die Menge $\varphi(\partial\mathbb{D})$ Lebesguemaß Null hat. (Der Beweis ist aber nicht einfach.) Es folgt, dass $J(f)$ unter den Voraussetzungen von Satz 2.4 Lebesguesche Nullmenge ist. Wir werden das einfacher auch im Falle, dass $J(f)$ nicht zusammenhängend ist, mit Hilfe des folgenden Begriffs einsehen.

Definition 2.4. Sei $A \subset \mathbb{C}$. Dann heißt A *porös*, falls $\eta, \delta > 0$ existieren, so dass für alle $a \in A$ und alle $r \in (0, \delta]$ ein $b \in \mathbb{C}$ mit

$$D(b, \eta r) \subset D(a, r) \backslash A$$

existieren.

Bemerkung. Die Bedingung besagt, dass in jeder Kreisscheibe mit Mittelpunkt in A eine kleinere Kreisscheibe vergleichbarer Größe liegt, die A nicht schneidet.

Man kann die Annahme, dass $a \in A$ gelten soll, auch weglassen, wenn man zu einer anderen Konstante η übergeht. Mit η wie oben existiert zu $a \in \mathbb{C}$ und $r \in (0, \delta]$ ein $b \in \mathbb{C}$ mit

$$D(b, \frac{1}{2}\eta r) \subset D(a, r) \backslash A \; .$$

Satz 2.8. *Sei f hyperbolisches Polynom. Dann ist $J(f)$ porös.*

Satz 2.9. *Poröse Mengen sind Nullmengen.*

Satz 2.9 ist eine unmittelbare Folgerung aus dem folgenden Resultat.

Hilfssatz 2.4 (Lebesguescher Dichtesatz) *Sei $A \subset \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{meas}(A \cap D(a, r))}{\operatorname{meas}(D(a, r))} = 1$$

für fast alle $a \in A$.

Für a, A wie in Definition 2.3 gilt nun

$$\operatorname{meas}(D(a, r) \backslash A) \geq \pi \eta^2 r^2 \; ,$$

also

$$\frac{\operatorname{meas}(A \cap D(a, r))}{\operatorname{meas}(D(a, r))} \leq 1 - \eta^2 \; .$$

Hieraus folgt, dass A Nullmenge ist.

Damit ist Satz 2.9 bewiesen.

Wir werden später noch einen elementaren Beweis von Satz 2.9 kennen lernen.

Beweis von Satz 2.8. Nach Satz 2.2 existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $|(f^n)'(z)| > 1$ für $z \in J(f)$. Wir können annehmen, dass $n = 1$ gilt.

Sei

$$\lambda = \min_{z \in J(f)} |f'(z)| \quad \text{und} \quad \mu = \max_{z \in J(f)} |f'(z)| \; .$$

Dann gilt $1 < \lambda \leq \mu < \infty$.

Sei $\delta = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(J(f), P(f))$. Nach Satz 2.1 gilt $\delta > 0$. Da $J(f)$ keine inneren Punkte enthält, existiert zu $a \in J(f)$ ein $b(a) \in \mathbb{C}$ und ein $c(a) > 0$ so dass

$$D(b(a), c(a)\delta) \subset D(a, \frac{1}{2}\delta) \backslash J(f) \; .$$

Da $J(f)$ kompakt ist, existieren $a_1, \ldots, a_m$ mit

$$J(f) \subset \bigcup_{j=1}^{m} D(a_j, \frac{1}{2}\delta) \; .$$

Wir setzen $c = \min_j c(a_j)$. Sei nun $a \in J(f)$. Dann existiert j mit $a \in D(a_j, \frac{1}{2}\delta)$. Es folgt mit $b = b(a_j)$, dass

$$D(b, c\delta) \subset D(a_j, \frac{1}{2}\delta) \backslash J(f) \subset D(a, \delta) \backslash J(f) \; .$$

Sei nun $u \in J(f)$ und $0 < r \leq \delta$. Sei $K > \lambda$ eine Konstante, deren Wert später festgelegt wird. Wegen $|(f^n)'(u)| \geq \lambda^n \to \infty$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|(f^n)'(u)| > K \frac{\delta}{r} \quad \text{und} \quad |(f^{n-1})'(u)| \leq K \frac{\delta}{r} \; .$$

Sei $a = f^n(u)$ und sei $b \in \mathbb{C}$ wie oben, d.h.,

$$D(b, c\delta) \subset D(a, \delta) \backslash J(f) .$$

Nach Wahl von δ ist der Zweig φ von $(f^n)^{-1}$ mit $\varphi(a) = u$ holomorph in $D(a, 2\delta)$.

Wegen $|b - a| < \delta$ folgt aus dem Koebeschen Verzerrungssatz mit $\varrho = \frac{1}{2}$, dass

$$|\varphi'(b)| \geq \frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3}|\varphi'(a)| = \frac{4}{27}|\varphi'(a)| .$$

Außerdem gilt

$$|\varphi'(a)| = \frac{1}{|(f^n)'(u)|} = \frac{1}{|f'(f^{n-1}(u))|} \cdot \frac{1}{|(f^{n-1})'(u)|} \geq \frac{1}{\mu}\frac{r}{K\delta}.$$

Es folgt, dass

$$|\varphi'(b)| \geq \frac{4r}{27\mu K\delta} .$$

Aus dem Koebeschen $\frac{1}{4}$-Satz folgt jetzt mit $\nu = \varphi(b)$ und $\eta = \frac{c}{27\mu K}$, dass

$$\varphi(D(b, c\delta)) \supset D(\nu, \frac{1}{4}\frac{4r}{27\mu K\delta}c\delta) = D(\nu, \eta r) .$$

Außerdem gilt mit $\varrho = \frac{1}{2}$, dass

$$|\nu - u| = |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}|\varphi'(a)| \cdot 2\delta = 4|\varphi'(a)|\delta = \frac{4\delta}{|(f^n)'(u)|} < 4\delta\frac{r}{K\delta} = \frac{4}{K}r.$$

Wählt man nun K so, dass

$$\frac{4}{K} + \eta = \frac{1}{K}\left(4 + \frac{c}{27\mu}\right) < 1,$$

so folgt

$$D(\nu, \eta r) \subset D(u, r) .$$

Außerdem gilt

$$D(\nu, \eta r) \cap J(f) = \emptyset$$

wegen $D(\nu, \eta r) \subset \varphi(D(b, c\delta))$ und der vollständigen Invarianz von $J(f)$. Die Behauptung folgt. $\square$

Definition 2.5. Sei $d \in \mathbb{N}, A \subset \mathbb{R}^d$ und $s > 0$. Dann heißt

$$H_s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } A_j)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \text{diam } A_j < \delta \right\}$$

das s-dimensionale *Hausdorffmaß* von A.

Bemerkung. Das Infimum in obiger Definition ist eine monotone Funktion von δ. Damit existiert der (eventuell uneigentliche) Grenzwert.

Gilt $0 < s < t$, so folgt $H_s(A) \leq \delta^{t-s} H_t(A)$ für alle $\delta > 0$, also $H_s(A) = 0$, falls $H_t(A) < \infty$.

Definition 2.6. Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^d$. Dann heißt

$$\dim A = \inf\{s > 0 : H_s(A) < \infty\}$$

Hausdorffdimension von A.

Bemerkung. Nach obiger Bemerkung gilt

$$\begin{aligned}\dim A &= \inf\{s > 0 : H_s(A) = 0\}\\ &= \sup\{s > 0 : H_s(A) > 0\}\\ &= \sup\{s > 0 : H_s(A) = \infty\}\end{aligned}$$

Dabei ist $\sup((0,\infty)) = 0$.

Man sieht leicht, dass $\dim\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \max \dim A_j$, falls $A_j \in \mathbb{R}^d, j \in \mathbb{N}$. Damit folgt, dass $\dim\ A \leq d$ für $A \subset \mathbb{R}^d$. Gilt $\dim A < d$, so folgt $H_d(A) = 0$. Hieraus folgt leicht, dass das (d-dimensionale) Lebesguemaß von A Null ist.

Der Begriff der Porösität überträgt sich in offensichtlicher Weise auf Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

Satz 2.10. *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ porös. Dann gilt $\dim A < d$.*

Beweis. Nach Definition der Porösität (sowie der Bemerkung im Anschluss an die Definition) existiert $\eta > 0$ und $\delta > 0$, so dass für alle $a \in \mathbb{R}^d$ und alle $r \in (0, \delta]$ ein $b \in \mathbb{R}^d$ mit $D(b, \eta r) \subset D(a, r)\backslash A$ existiert.

Wir zeigen nun, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft existiert: Ist Q ein Quadrat (bzw. Würfel) der Seitenlänge $\ell \leq 2\delta$ und sind $Q_1, \ldots, Q_{N^d}$ die Quadrate, die durch Unterteilung von Q in Quadrate der Seitenlänge ℓ/N entstehen, so existiert $k \in \{1, \ldots, N^d\}$ mit $Q_k \cap A = \emptyset$.

Sei dazu a der Mittelpunkt von Q und $r = \frac{1}{2}\ell$. Dann gilt $D(a, r) \subset Q$. Sei jetzt b mit $D(b, \eta r) \subset D(a, r)\backslash A$. Nun enthält $D(b, \eta r)$ ein Quadrat mit Seitenlänge $\frac{1}{2}\eta r$. Dieses Quadrat enthält eines der Quadrate Q_k, falls $\ell/N \leq \frac{1}{4}\eta r$. Mit $\ell = 2r$ folgt, dass für $N \geq 8/\eta$ ein $k \in \{1, \ldots, N^d\}$ mit $Q_k \subset D(b, \eta r) \subset D(a, r)\backslash A \subset Q\backslash A$ existiert.

Sei nun Q ein Quadrat der Seitenlänge $\ell = 2\delta$. Dann können wir $Q \cap A$ mit $N^d - 1$ Quadraten der Seitenlänge ℓ/N überdecken. Den Schnitt von A mit einem dieser Quadrate können wir wiederum mit N^d-1 Quadraten der Seitenlänge ℓ/N^2 überdecken. Dies liefert eine Überdeckung von $Q \cap A$ mit $(N^d - 1)^2$ Quadraten der Seitenlänge ℓ/N^2. Induktiv erhält man für $k \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $\{Q_j^k : 1 \leq j \leq (N^d - 1)^k\}$ von $Q \cap A$ durch $(N^d - 1)^k$ Quadrate der Seitenlänge ℓ/N^k. Nun gilt

$$\sum_j (\text{diam } Q_j^k)^s = (N^d - 1)^k \left(\frac{\sqrt{d}\ell}{N^k}\right)^s = (\sqrt{d}\ell)^s \left(\frac{N^d - 1}{N^s}\right)^k$$

für $s > 0$. Für

$$s = \frac{\log(N^d - 1)}{\log N}$$

gilt

$$\frac{N^d - 1}{N^s} = 1$$

und damit $H_s(Q \cap A) < \infty$. Es folgt $\dim(Q \cap A) \leq s$. Da dies für jedes Quadrat Q der Seitenlänge ℓ gilt, folgt $\dim A \leq s$.

Die Behauptung folgt, da

$$s = \frac{\log(N^d - 1)}{\log N} < \frac{\log(N^d)}{\log N} = d\ .$$

Insbesondere liefert Satz 2.10 auch einen direkten Beweis von Satz 2.9. ☐

Bemerkung. Für nichthyperbolische Polynome f kann $\dim J(f) = 2$ und sogar $\operatorname{meas} J(f) > 0$ gelten. Die Konstruktion solcher Beispiele ist sehr aufwändig.

Ziel der nächsten Untersuchungen ist der folgende Satz.

Satz 2.11. *Sei f rational. Dann gilt* $\dim J(f) > 0$.

Wichtigstes Hilfsmittel dafür ist der folgende Satz.

Satz 2.12. *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ und sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf A mit der Eigenschaft, dass $c, t, r_0 > 0$ mit*

$$\mu(D(a,r)) \le cr^t$$

für alle $a \in A$ und alle $r \in (0, r_0]$. Dann gilt $\dim A \ge t$.

Beweis. Sei $\delta > 0$ und seien $A_1, A_2, \ldots$ mit $A \subset \bigcup_j A_j$ und $\operatorname{diam} A_j < \delta$ für alle j. Wir können annehmen, dass $A_j \cap A \neq \emptyset$ für alle j, etwa $a_j \in A \cap A_j$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(A) \\ &\le \textstyle\sum_j \mu(A_j) \\ &\le \textstyle\sum_j \mu(D(a_j, 2 \operatorname{diam} A_j)) \\ &\le c \textstyle\sum_j (2 \operatorname{diam} A_j)^t \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass

$$H_t(A) \ge \frac{1}{2^t c},$$

also $\operatorname{diam} A \ge t$. □

Wir werden das Maß μ, auf das wir Satz 2.12 anwenden werden, als (schwachen) Grenzwert einer Folge von Maßen gewinnen. Dazu benutzen wir, dass eine Folge (μ_n) von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\hat{\mathbb{C}}$ eine schwach konvergente Teilfolge (μ_{n_k}) hat.

Hilfssatz 2.5. Sei (μ_n) eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\hat{\mathbb{C}}$. Dann hat (μ_n) eine schwach konvergente Teilfolge, d.h., es existiert eine Teilfolge (μ_{n_k}) und ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit

$$\int_{\hat{\mathbb{C}}} g d\mu_{n_k} \to \int_{\hat{\mathbb{C}}} g d\mu$$

für alle stetigen Funktionen $g : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$.

Der Beweis benutzt den folgenden Riesz-Darstellungssatz für lineare Funktionale. Sei dabei $C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen von $\hat{\mathbb{C}}$ nach $\mathbb{R}$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Ein stetiges lineares Funktional $L : C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt positiv, falls $L(g) \ge 0$ für alle g mit $g(z) \ge 0$ für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Hilfssatz 2.6. Sei L positives lineares Funktional auf $C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$. Dann existiert ein Maß μ mit

$$L(g) = \int_{\hat{\mathbb{C}}} g d\mu$$

für alle $g \in C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$. Umgekehrt definiert jedes Maß auf $\hat{\mathbb{C}}$ so ein lineares Funktional auf $C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$.

Bemerkung. Ist L nicht positiv, so gilt eine entsprechende Aussage mit einem signierten Maß μ.

Beweisskizze von Hilfssatz 2.5. Sei (g_k) eine dichte Folge in $C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$. Sei (μ_k^1) eine Teilfolge von (μ_n), so dass

$$\left(\int_{\hat{\mathbb{C}}} g_1 d\mu_k^1\right)$$

konvergiert. Sei (μ_k^2) Teilfolge von (μ_k^1), so dass

$$\left(\int_{\hat{\mathbb{C}}} g_2 d\mu_k^2\right)$$

konvergiert. Induktiv wählen wir eine Teilfolge (μ_k^m) von (μ_k^{m-1}), so dass

$$\left(\int_{\hat{\mathbb{C}}} g_m d\mu_k^m\right)$$

konvergiert. Wählt man (μ_{n_k}) als „Diagonalfolge", also $\mu_{n_k} = \mu_k^k$, so konvergiert

$$\left(\int_{\hat{\mathbb{C}}} g_m d\mu_{n_k}\right)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen der Dichtheit von (g_m) folgt, dass

$$L(g) := \lim_{k\to\infty} \int_{\hat{\mathbb{C}}} g d\mu_{n_k}$$

für alle $g \in C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R})$ existiert. Leicht sieht man, dass $L : C(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ positives stetiges, lineares Funktional ist. Die Behauptung folgt nun aus Hilfssatz 2.5. $\square$

Wir erinnern daran, dass für eine rationale Funktion f und $z_0 \notin E(f)$ gilt, dass $J(f) \subset \overline{O^-(z_0)}$. Verwandt ist folgender Satz.

Hilfssatz 2.7. Sei $z_0 \notin E(f)$ mit $D(z_0, \varrho) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(D(z_0, \varrho)) = \emptyset$ für ein $\varrho > 0$. Dann gilt

$$J(f) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-m}(z_0)}$$

Beweis. Die Inklusion

$$J(f) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-m}(z_0)}$$

folgt mit $J(f) \subset \overline{O^-(z_0)}$.

Sei nun $z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} f^{-m}(z_0)}$. Dann existieren $m_k \to \infty$ und $z_k \to z$ mit $f^{m_k}(z_k) = z_0$. Falls $z \notin J(f)$ gilt, so existiert eine Umgebung von z, in der eine Teilfolge von (f^{m_k}) konvergiert.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $f^{m_k}|_{D(z,\varrho)} \to \phi$. Es folgt $\phi(z) = z_0$ und damit $f^{m_k}(z) \in D(z_0, \varrho)$. Andererseits existiert nach Voraussetzung höchstens ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m(z) \in D(z_0, \varrho)$. Das ist ein Widerspruch. Also gilt $z \in J(f)$. $\square$

Es folgt aus Hilfssatz 2.7, dass für $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$J(f) \subset \overline{\bigcup_{m=N}^{\infty} f^{-m}(z_0)} \subset U_\delta(J(f))$$

existiert.

Hilfssatz 2.8. Ist $J(f) \neq \hat{\mathbb{C}}$, so existieren z_0 und ϱ mit der in Hilfssatz 2.7 angegebenen Eigenschaft. Außerdem kann noch $D(z_0, \varrho) \cap P(f) = \emptyset$ verlangt werden.

Beweis. Hat f einen anziehenden oder rational indifferenten Zykel, so wähle man z_0 aus dem Einzugsbereich des Zykels, aber nicht aus dem Zykel selbst.

Hat f einen Zykel von Siegelscheiben oder Hermanringen, so wähle man z_0 aus einem Urbild einer Komponente dieses Zykels, welches selbst nicht zum Zykel gehört.

In beiden Fällen gilt dann

$$D(z_0, r) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(D(z_0, r)) = \emptyset,$$

wenn man r genügend klein wählt. Da der Orbit jedes kritischen Punktes $D(z_0, r)$ höchstens einmal schneidet, kann man auch $D(z_0, r) \cap P(f) = \emptyset$ annehmen.

Nach Klassifikation periodischer Komponenten und Satz von Sullivan trifft aber eine der obigen Fälle zu. □

Bemerkung. Der Satz von Sullivan wird hier nicht benötigt. Denn hätte f ein wanderndes Gebiet U, so könnte man einfach $D(z_0, \varrho) \subset U$ wählen.

Beweis von Satz 2.11. Gilt $J(f) = \hat{\mathbb{C}}$, so ist nichts zu zeigen. Wir können daher annehmen, dass $J(f) \neq \hat{\mathbb{C}}$ gilt, und es ist keine Einschränkung vorauszusetzen, dass $\infty \in F(f)$. Sei $\delta > 0$ und

$$K = \sup_{z \in U_\delta(J(f))} |f'(z)|, \qquad \text{mit } U_\delta(J(f)) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, J(f)) < \delta\}.$$

Seien z_0 und ϱ gemäß Hilfssatz 2.8 gewählt. Da $z_0 \notin P(f)$, besteht $f^{-n}(z_0)$ aus d^n Punkten, wobei d der Grad von f ist. Sei μ_n das Maß, welches Punktmassen $1/d^n$ an den Punkten von $f^{-n}(z_0)$ hat, d.h., mit dem Dirac-Maß δ_z gilt

$$\mu_n = \frac{1}{d^n} \sum_{\{z : f^n(z) = z_0\}} \delta_z \ .$$

Für $A \subset \mathbb{C}$ gilt also $\mu(A) = |A \cap f^{-n}(z_0)|/d^n$, wobei $|\cdot|$ die Kardinalität einer Menge bezeichnet.

Wir wollen Satz 2.12 auf einen schwachen Grenzwert der Folge (μ_n) anwenden und dafür $\mu_n(D(a, r))$ abschätzen.

Sei dazu $u \in f^{-n}(z_0)$, also $f^n(u) = z_0$. Der Zweig ϕ_n von $(f^n)^{-1}$ mit $\phi(z_0) = u$ ist holomorph und injektiv in $D(z_0, \varrho)$. Für $u, v \in f^{-n}(z_0)$ mit $u \neq v$ gilt außerdem $\phi_n(D(z_0, \varrho)) = \emptyset$. Nach Satz von Koebe gilt

$$\phi_n(D(z_0, \varrho)) \supset D(\phi_n(z_0), \frac{1}{4}\phi_n'(z_0)\varrho) = D\left(u, \frac{\varrho}{4|(f^n)'(u)|}\right).$$

Nun existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $f^{-m}(z_0) \in U_\delta(J(f))$ für $m \geq N$. Für $n > N$ erhalten wir

$$|(f^n)'(u)| = \prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(u))| \leq K^{n-N} \prod_{k=n-N}^{n-1} |f'(f^k(u))| \ .$$

Mit

$$L = \max\left\{ |f'(v)| : v \in \bigcup_{m=1}^{N} f^{-m}(z_0) \right\}$$

folgt

$$|(f^n)'(u)| \leq K^{n-N} L^N = \left(\frac{L}{K}\right)^N K^n \ .$$

Mit $\eta = \frac{\varrho}{4}\left(\frac{K}{L}\right)^N$ folgt

$$\phi_U(D(z_0, \varrho)) \supset D\left(u, \frac{\eta}{K^n}\right) \ .$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\eta < \delta$ gilt. Sei nun $r \in (0, \eta)$. Wir wählen m mit

$$\frac{\eta}{K^{m+1}} < r \leq \frac{\eta}{K^m}\,;.$$

Es folgt

$$|D(a,r) \cap f^{-m}(z_0)| \leq 1$$

für alle $a \in J(f)$. Dies liefert

$$\mu_m(D(a,r)) \leq \frac{1}{d^m}\,.$$

Mit $t = (\log d)/(\log K)$ gilt $d = K^t$ und damit

$$\mu_m(D(a,r)) \leq \left(\frac{1}{K^m}\right)^t = \left(\frac{\eta K}{\eta K^{m+1}}\right)^t \leq \left(\frac{K}{\eta}\right)^t r^t\,.$$

Um eine entsprechende Abschätzung für $\mu(D(a,r))$ zu erhalten, müssen wir $\mu_n(D(a,r))$ für $n \geq m$ abschätzen.

Dies ist einfach, wenn f hyperbolisch ist, oder, allgemeiner, wenn $J(f)$ keine kritischen Punkte enthält. In diesem Fall wählen wir δ so, dass $U_\delta(J(f))$ keine kritischen Punkte und Werte von f enthält.

Da $|f'(z)| \leq K$ für $z \in U_\delta(J(f))$ folgt, dass $f^\ell(D(a,r)) \leq D(f^\ell(a), K^\ell r)$ so lange $K^\ell r \leq \delta$, also für $\ell \leq m$. Außerdem folgt, dass f^m die Kreisscheibe $D(a,r)$ bijektiv auf ein Teilgebiet von $D(f^m(a), \eta)$ abbildet. Damit folgt

$$|D(a,r) \cap f^{-n}(z_0)| \leq |D(f^m(a), \eta) \cap f^{m-n}(z_0)| \leq d^{n-m}\,.$$

Wir erhalten damit

$$\mu_n(D(a,r)) \leq \frac{d^{n-m}}{d^n} = \frac{1}{d^m} \leq \left(\frac{K}{\eta}\right)^t r^t\,.$$

Mit Satz 2.12 folgt $\dim J(f) \geq t > 0$.

Im Falle, dass $J(f)$ kritische Punkte enthält, skizzieren wir das Argument nur: Da die kritischen Punkte in $J(f)$ nicht periodisch sind, existiert zu $N \in \mathbb{N}$ ein $\delta > 0$, so dass für jeden kritischen Punkt $c \in J(f)$ und $1 \leq \ell \leq N$ gilt, dass $|f^\ell(c) - c| \geq 2\delta$. Jeder kritische Punkte ist damit in höchstens m/N der Gebiete $f^\ell(D(a,r))$, $\ell = 0, \ldots, m-1$ enthalten. Hieraus erhält man, dass die Funktion $f : f^\ell(D(a,r)) \to f^{\ell+1}(D(a,r))$ für höchstens $2dm/NJ$ Werte von ℓ nicht bijektiv ist.

Dies liefert dann wie oben

$$|D(a,r) \cap f^{-n}(z_0)| \leq d^{2dm/N} d^{n-m}$$

und damit

$$\mu_n(D(a,r)) \leq \frac{1}{d^{m(1-2d/N)}}\,.$$

Dies liefert $\dim J(f) \geq t\left(1 - \frac{2d}{N}\right)$, aber da N beliebig groß gewählt werden kann, erhält man auch hier $\dim J(f) \geq t$.

□

3. Ganze Funktionen

DIESER ABSCHNITT FEHLT NOCH!